PROGRAMMA con domande per la PARTE A
Istituzioni di Analisi Matematica
A.A. 2024-2025

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

1. Dare la definizione di maggioranti di un insieme, estremo superiore di un insieme, massimo di un insieme. Analogamente con minoranti, estremo inferiore e minimo.

2. Dare la definizione di funzione iniettiva e di funzione invertibile.

3. Dare la definizione di funzione monotona (crescente o decrescente) e strettamente monotona (crescente o decrescente). Enunciare il teorema sulla invertibilità delle funzioni strettamente monotone.

4. Dare la definizione di funzione simmetrica (pari o dispari) e ricordare la caratteristica dei grafici di queste funzioni. Dare la definizione di funzione periodica. (Facoltativo: esibire qualche esempio)

5. Dare la definizione di limite (finito) di funzione in un punto x_0, o a $\pm\infty$. Dare la definizione di limite $+\infty$ (o $-\infty$) di funzione in un punto x_0 o a $\pm\infty$.
   la domanda potrebbe essere anche posta in questo modo
   Dare la definizione di limite di funzione nel caso
   $$\lim_{x\to 2} f(x) = -5.$$
   (e con altri valori al posto di 2 e -5, tra i quali anche $+\infty$ o $-\infty$.)

6. Enunciare il teorema del confronto (detto anche dei due Carabinieri) per limiti di funzioni.

7. Dare la definizione di limite di successione. Dare la definizione di successioni convergenti, divergenti e irregolari. Fare qualche esempio.

8. Dare la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui, con la caratterizzazione degli asintoti obliqui.

9. Dare la definizione di funzione continua in x_0. Classificare i punti di singolarità (o discontinuità) di f: punti di singolarità eliminabile, singolarità di salto o di prima specie, singolarità di seconda specie. Dire cos'è il prolungamento per continuità di una funzione in un punto con singolarità eliminabile.

10. Dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ed enunciare almeno una della sue conseguenze (limiti notevoli derivati).

11. Dare la definizione di funzione continua (in un intervallo) e enunciare il teorema dei valori intermedi.

12. Dare la definizione di funzione continua (in un intervallo) ed enunciare il teorema di Weierstrass.

13. Dare la definizione di derivata di f in un punto x_0 e scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

14. Dare la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione tra derivabilità e continuità in un punto (derivabile implica continua ma il viceversa non è vero.....)

15. Classificare i punti di non derivabilità di un funzione: punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale.

16. Dimostrare che se $f(x) = e^x$ la sua derivata è $f'(x) = e^x$.

17. Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

18. Dimostrare che se $f(x) = \log x$ la sua derivata è $f'(x) = \frac{1}{x}$.

19. Dimostrare che se $f(x) = \arctan x$ la sua derivata è $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

20. Dare la definizione di punto di minimo e di massimo locale per f. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

21. Enunciare il teorema di Lagrange (o del Valor Medio).

22. Enunciare e dimostrare il Criterio di monotonia (relazione tra derivata prima e monotonia).

23. Dare la definizione di funzione convessa (definizione geometrica). Enunciare il criterio di convessità per funzioni due volte derivabili.

24. Enunciare il teorema di Taylor, con l'errore scritto con gli "o piccoli" (di Peano).

25. Dare la definizione di serie convergente, divergente ed irregolare (Facoltativo: fornire qualche esempio).

26. Dare la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge/diverge/ è irregolare.

27. Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza di una serie (se la serie converge allora $\lim_n a_n = 0$). Mostrare che il viceversa non è vero.

28. Enunciare e dimostrare la proprietà delle serie a termini positivi (o convergono o divergono a $+\infty$).

29. Enunciare i criteri della radice e del rapporto per le serie a termini positivi.

30. Dare la definizione di serie armonica generalizzata. Enunciare quando converge/diverge.

31. Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

32. Dare la definizione di convergenza assoluta. Dire in che rapporto è che la convergenza assoluta con la convergenza (semplice).

33. Dare la definizione di serie a termini di segno alterno. Enunciare il criterio di convergenza delle serie con termini di segno alterno (di Leibniz).

34. Enunciare il Teorema della media integrale.

35. Dare la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

36. Dare la definizione di primitiva di f. Enunciare e dimostrare il teorema sulle primitive di una funzione f in un intervallo (se F è primitiva allora $F + k$ è primitiva per k costante, se F_1 e F_2 sono due primitive di f allora $F_1 = F_2 + k$).

37. Enunciare e dimostrare il Corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale: data G primitiva di f, $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

38. Dare la definizione di integrale generalizzato su intervalli illimitati (o di integrale generalizzato su intervalli limitati, a scelta)

39. Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati (o limitati, a scelta) per funzioni positive.

40. Dimostrare per quali α, $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$.

41. Dare la definizione di derivata parziale per una funzione di due variabili.

42. Dare la definizione di punto critico di una funzione in due variabili.

43. Enunciare il criterio dell'Hessiana per stabilire la natura dei punti critici.

OSSERVAZIONI

- Questo è il programma per la Parte A della prova scritta.
- Le dimostrazioni si intendono con le ipotesi assunte a lezione.