ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.09.2022
Canale C
Prof. Bianchini Bruno

Correzione TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{\cosh(\sin x)}$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare segno, eventuale simmetria e periodicitá di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Correzione i) Il dominio é dato da $\left|\frac{1}{\cosh(\sin x)}\right| \leq 1$. Poiché $\cosh x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo che il dominio é D=$\mathbb{R}$. La funzione é periodica di periodo 2π poiché tale e' il $\sin x$. Possiamo quindi limitare lo studio della funzione a $[-\pi, \pi]$. Inoltre la funzione é pari, poiché come si vede facilmente $f(x) = f(-x)$. Quindi possiamo restringere ulteriormente lo studio a $D_1 = [0, \pi]$. Poiché l'argomento dell'arcosin é ≥ 0 la funzione é sempre ≥ 0. La funzione é inoltre continua in $\mathbb{R}$ e si calcola facilmente che $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = f(\pi)$, come deve essere per la periodicitá e poiché la funzione é continua in $\mathbb{R}$.

ii) La funzione é derivabile in $x \in (0, \pi)$ poiché l'argomento dell arcsin é < 1. In tali valori abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\cosh^2(\sin x)}}} \tfrac{-1}{\cosh^2(\sin x)}. \sinh(\sin x). \cos x \\ &= -\tfrac{\sinh(\sin x). \cos x}{\cosh(\sin x)\sqrt{\cosh^2(\sin x)-1}} = -\tfrac{\cos x}{\cosh(\sin x)} \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che $x \in D_1$ e quindi sinh é > 0. Il segno di f' dipende solo dal numeratore. Si vede facilmente che f decresce in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e cresce in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Quindi $0, \pi$ sono punti di massimo assoluto mentre $\frac{\pi}{2}$ é un punto di minimo assoluto. Vediamo gli attacchi

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 = f'_+(0) \\ &\lim_{x\to \pi^-} f'(x) = 1 = f'_-(\pi) \end{aligned}$$

Per la simmetria e la periodicitá la funzione non risulta derivabile in 0 e π, e quindi in $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ dove ha punti angolosi.
iii) Il grafico della funzione segue:

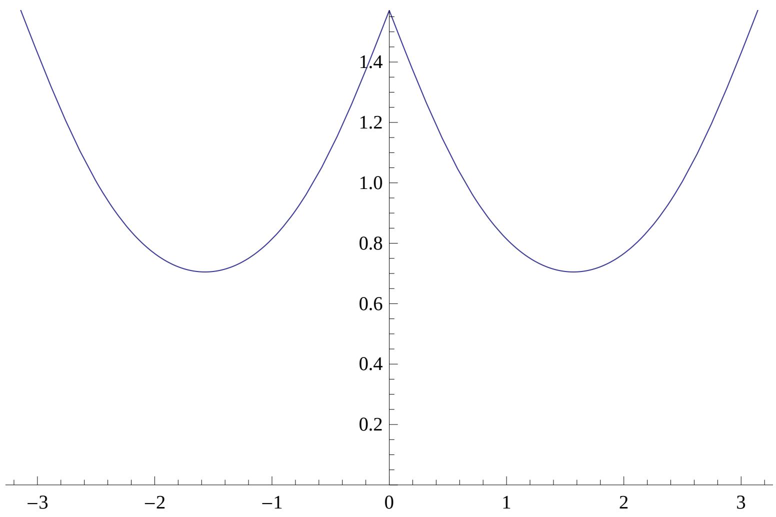

Figure 1: Il grafico di $f(x) = \arcsin \frac{1}{\cosh(\sin x)}$.

Esercizio 2 [8 punti] Disegnare nel piano complesso l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$|z|^2 < \frac{1}{2}\left(z^2 + \bar{z}^2\right) + \frac{1}{2}|z + \bar{z}| + 1$$

Correzione Posto $z = x + iy$ si ha

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy\right) + \frac{1}{2}|x + iy + x - iy| + 1.$$

Semplificando otteniamo:

$$2y^2 < |x| + 1$$

Si vede facilmente che il grafico é come segue:

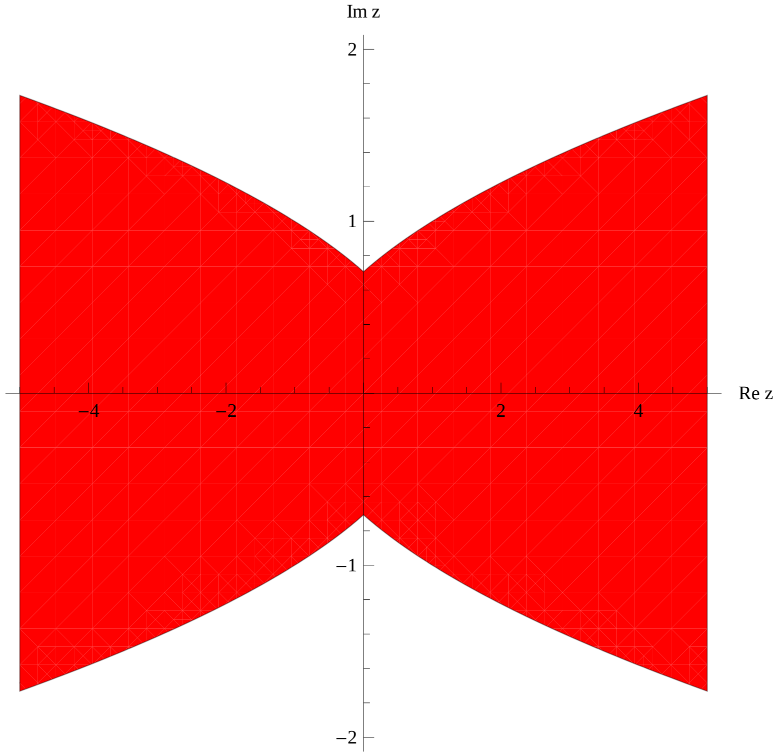

Figure 2: Le soluzioni di $|z|^2 < \frac{1}{2}\left(z^2 + \bar{z}^2\right) + \frac{1}{2}\left|z + \bar{z}\right| + 1$.

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare al variare di $\alpha > 0$ il valore del limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - \tan x^\alpha + \frac{2}{3}x^2 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\arcsin x^2 - x^\alpha + \tan x} = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Correzione: Abbiamo che $\sin x = x + o(x)$ $\tan x^\alpha = x^\alpha + o(x^{2\alpha})$ mentre $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ é un infinitesimo di ordine maggiore a x^α per ogni $\alpha > 0$ per $x \to 0^+$ e quindi per il PSI puó essere ignorato al numeratore. Quindi per $0 < \alpha < 1$ per il PSI otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\tan x^\alpha}{-x^\alpha} = 1$$

Per $\alpha = 1$ sempre per il PSI (poiché $\sin x - \tan x$ é di ordine 3 come pure $x - \tan x$) otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^2}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

Per $\alpha > 1$ sempre per il PSI otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\tan x} = 1$$

Quindi per $\alpha \in \frac{\mathbb{R}^+}{1}$ il limite vale 1 . Per $\alpha = 1$ il limite vale $\frac{2}{3}$.

Esercizio 4 [8 punti] i) Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^2 \frac{x+2}{(x-1)^\alpha} dx$$

ii) Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Correzione: i) Poiché l'unico punto pericoloso é in 1, usando il confronto asintotico, si vede subito che l'integrale converge per $\alpha < 1$.

ii) Poniamo $\sqrt{x-1} = t$. Quindi $x + 2 = t^2 + 3$ e $dx = 2tdt$. L'integrale quindi diventa

$$\int_0^1 \frac{t^2+3}{t} 2tdt = 2\int_0^1 (t^2+3) = 2\left[\frac{t^2}{3} + 3t\right|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{20}{3}.$$

Tempo a disposizione: 2 ore.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.