Teorema della MEDIA INTEGRALE

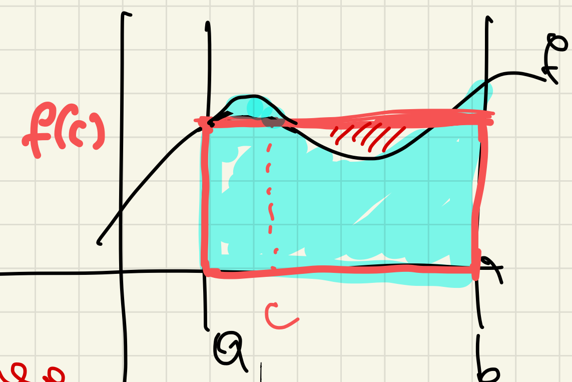
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA.

Allora esiste $c\in[a,b]$ tale che

$$\boxed{f(c)\,(b-a)} = \int_a^b f(x)\,dx$$

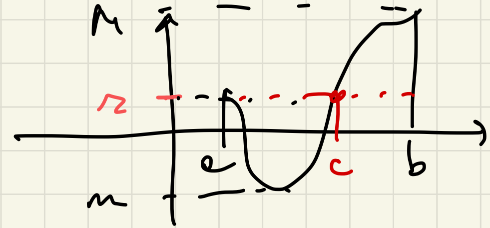
EQUIVALENTEMENTE

$$f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$$



esiste almeno un pto c tale che area celeste ($\int_a^b f(x)dx$) è uguale all'area del rettangolo di base (a,b) e altezza $f(c)$.

dim



f continua su $[a,b]$

$\boxed{1)}$ per teorema di WEIERSTRASS f ammette minimo e massimo:

$$f(x_m) = m = \min_{[a,b]} f \qquad M = \max_{[a,b]} f = f(x_M)$$

$\boxed{2)}$ per teorema dei VALORI INTERMEDI f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo

$m < r < M \qquad \exists\, c \in [a,b] \;\; f(c) = r.$

m ↑ minimo di f $\qquad$ M ↓ massimo di f

sappiamo che

$$\frac{m\,\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le \frac{M\,\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} \qquad \cdot \frac{1}{(b-a)} > 0$$

$m = \min f \qquad M = \max f$

$$\downarrow$$

$$m \le \boxed{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx} \le M$$

$$\parallel$$

$$r$$

per teorema valori intermedi $\exists\, c \in [a,b]$

$$f(c) = r = \boxed{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx}$$

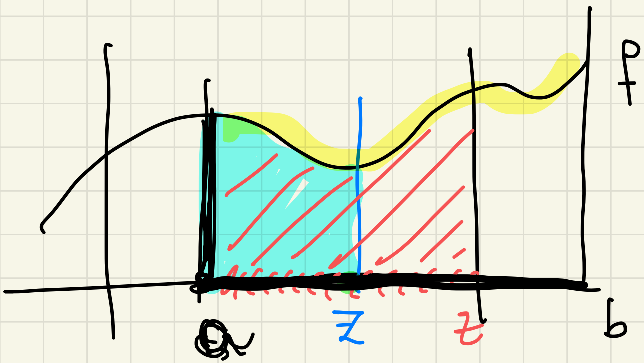
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}}$$

L'INTEGRALE di f (UN NUMERO)

$$\boxed{\text{DEFINISCO LA FUNZIONE INTEGRALE di } f \text{ nell'intervallo } [a,b] \text{ in questo modo:}}$$

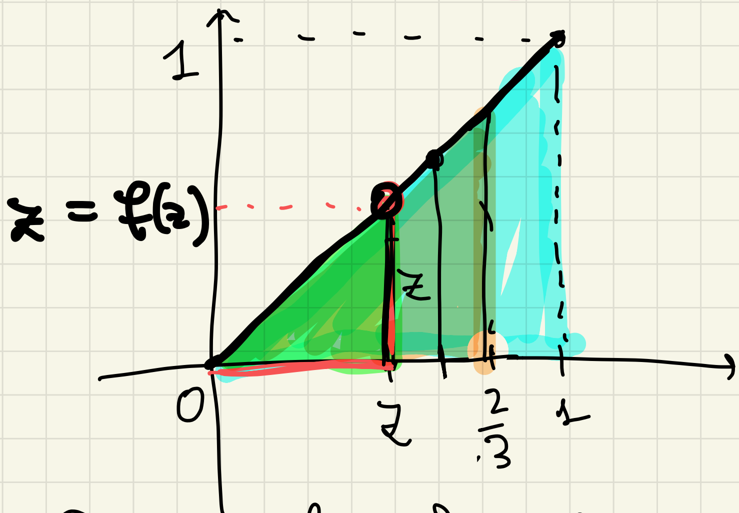
$z \in [a,b] \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{area compresa tra il grafico} \\ \text{di } f \text{ e asse delle } x \\ \text{nell'intervallo } [a,z] \end{array} \right.$



$z = a \longrightarrow 0 =$ area del segmento $[0, f(a)]$

$z = b \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

es $\boxed{f(x) = x}$ $x \in [0,1]$



$$\underline{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

scrivo la funzione integrale associata a f in [0,1]

$\underline{\underline{z}} \longmapsto \frac{1}{2} z^2$ $\left(\frac{1}{2}(\text{base triangolo})(\text{h. triang.})\right)$

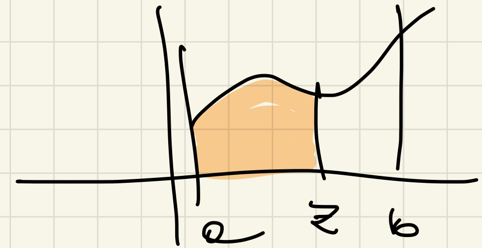
$\frac{2}{3} \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$f(x) = x$ → la funzione integrale è la funzione che associa a ogni valore in $[0,1]$ $\frac{1}{2}(\text{valore})^2$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{FUNZIONE INTEGRALE}}$$

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = x = f(x)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione integrale

$z \longmapsto$ area (con segno) compresa tra grafico f e asse x nell'intervallo $[a,z]$

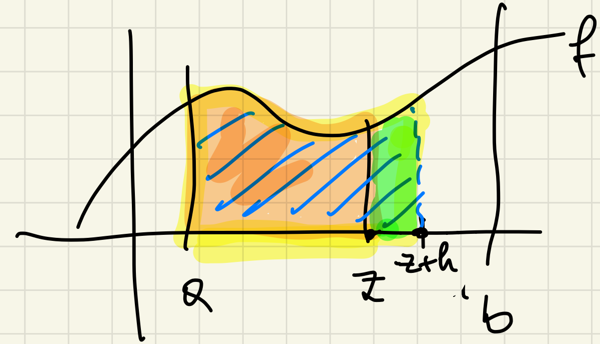
$$= \int_a^z f(x)\,dx$$

Allora la derivata di F è f.

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in (a,b)$$

dimostrazione

$$\underbrace{F(z) = \int_a^z f(x)\,dx}_{}$$



$$F'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{F(z+h)} - F(z)}{h}$$ (definizione di derivata)

$\underline{F(z+h)}$ = area con segno compresa tra grafico di f e asse x nell'intervallo $[a, z+h]$

$$= \int_a^{z+h} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^z f(x)\,dx}_{} + \int_z^{z+h} f(x)\,dx$$

$$F(z+h) = F(z) + \int_z^{z+h} f(x)\,dx$$

$$F(z+h) - F(z) = \boxed{\int_z^{z+h} f(x)\,dx}$$

$$[z, z+h] \subseteq [a,b]$$

f continua in $[z, z+h]$ $\rightarrow$ applico teorema della MEDIA INTEGRALE nell'intervallo $[z, z+h]$

$\Rightarrow \exists\, c \in [\underset{\text{"a"}}{z}, \underset{\text{"b"}}{z+h}]$ $\quad \underbrace{f(c) \cdot (\cancel{z}+h-\cancel{z})} = \int_z^{z+h} f(x)\,dx$

esiste $c \in [z, z+h]$ $\quad f(c) \cdot h = \int_z^{z+h} f(x)\,dx$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{\cancel{h}\cdot f(c)}{\cancel{h}} \qquad c\in[z, z+h]$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(c) \qquad c\in[z, z+h]$$

$\forall z \in (a,b)$

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(z)$$

$\downarrow$ definizione di derivata

$$\boxed{\begin{array}{c} z \le c \le z+h \\ \text{per } h\to 0 \quad c\to z \end{array}}$$

Definizione: data f continua su un intervallo I, si chiama **PRIMITIVA di f** nell'intervallo I ogni funzione che abbia derivata uguale a f in tutti i pti dell'intervallo.

(Notabene che il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale associata a f in $[a,b]$ è una PRIMITIVA di f nell'intervallo (a,b).

Teorema di caratterizzazione delle primitive

f continua in un intervallo I.

1) se $G(x)$ è una primitiva di f in I allora per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, $G(x)+c$ è ancora primitiva di f

dim: [$G(x)$ è primitiva di f per definizione $G'(x) = f(x) \ \forall x \in I$

$\Rightarrow \quad (G(x)+c)' = G'(x) + 0 = f(x) \rightarrow G(x)+c$ è primitiva di f in I.]

es: $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x \qquad \left(\frac{1}{2}x^2+3\right)' = x \qquad \left(\frac{1}{2}x^2+c\right)' = x$

2) se G_1 e G_2 sono due primitive di f in I (cioè $G_1'(x) = f(x) = G_2'(x)$ $\forall x \in I$)

allora c'è una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{G_1(x) = G_2(x) + c}$$

es. $G_1'(x) = x = G_2'(x)$ $\quad G_1(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad G_2(x) = \frac{x^2}{2} + 3$

dim

$$G(x) = G_1(x) - G_2(x)$$

$$G'(x) = G_1'(x) - G_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$\to$ G costante in I $\longrightarrow$ $G(x) = c$ $\forall x \in I$

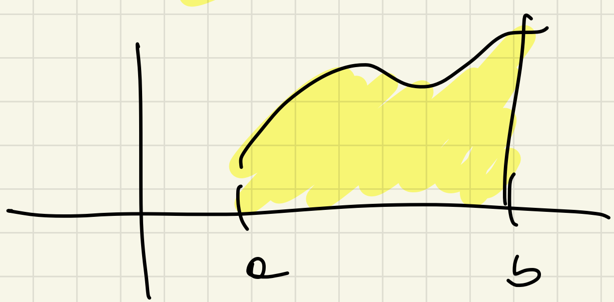
$\to$ $c = G_1(x) - G_2(x)$ $\quad \forall x \in I$

COROLLARIO del teorema fondamentale del calcolo integrale

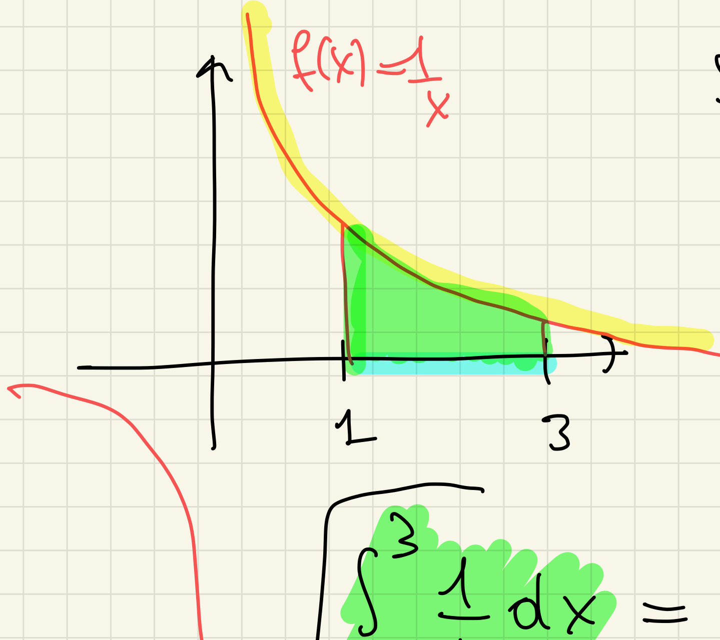
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$G : [a,b] \to \mathbb{R}$ PRIMITIVA di f in $[a,b]$
$(G'(x) = f(x) \ \forall x \in (a,b))$

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$



Es



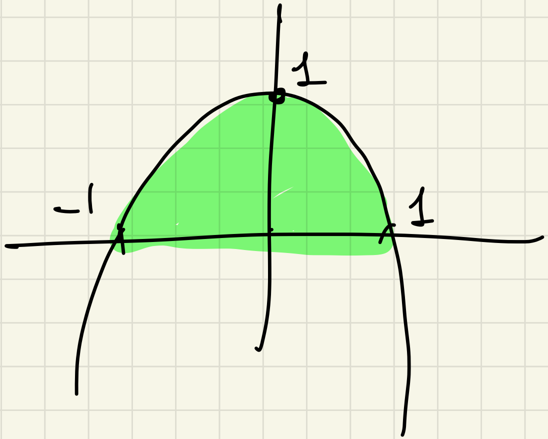
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \in [1, 3]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

$$\boxed{\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx} = \lg 3 - \underbrace{\cancel{\lg 1}}_{=0} = \lg 3$$

per $x > 0$ $\quad (\lg x)' = \frac{1}{x}$ $\quad G(x) = \lg x$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$

Es



$$f(x) = \underbrace{1 - x^2}_{}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$G(x) = x - \frac{1}{3}x^3 \qquad G'(x) = 1 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 1 - x^2 = f(x)$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = G(1) - G(-1) = \left[1 - \frac{1}{3}1^3\right] - \left[(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \left[-1 + \frac{1}{3}\right] = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

dimostrazione del corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua , G primitiva di f

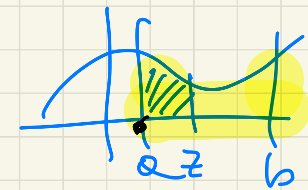
→ per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione INTEGRALE F di f è una PRIMITIVA di f

F e G sono entrambe primitive di f nello stesso intervallo

per il pto 2 di teorema di caratterizzazione delle primitive esiste $c\in\mathbb{R}$ $F(x)=G(x)+c$ $\forall x \in [a,b]$

$$\boxed{F(x) = G(x) + c} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Ricordo che F associa a ogni valore z in [a,b] area con segno della regione tra grafico f e asse x nell'intervallo [a,z].



$x = a$

$$F(a) = G(a) + c$$

$$F(a) = 0$$

$$\boxed{0 = G(a) + c}$$

$x = b$

$$F(b) = G(b) + c$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \implies \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) + c}$$

$$\begin{cases} 0 = G(a) + C \\ \int_a^b f(x)\,dx = G(b) + C \end{cases}$$

$\longrightarrow -C = +G(a)$

$C = -G(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

$\square$.

Ora il problema si è spostato al calcolo delle primitive.

per f continua indico con $\int f(x)\,dx$ l'insieme di tutte le primitive di f. (INTEGRALE INDEFINITO)

1

nell'intervallo $(0,+\infty)$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \lg x + c$$

(nell'intervallo $(0,+\infty)$ tutte le primitive di $\frac{1}{x}$ sono $\lg x + c$, c costante).

nell'intervallo $(-\infty, 0)$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \lg|x| + c$$

$x < 0$

$\lg|x| = \lg(-x)$

$x < 0$

$$(\lg|x|)' = [\lg(-x)]' =$$

$$= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

altra osservazione $A, B, D \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{D}{Ax+B}\,dx = ?$$

devo cercare una funzione $x > -\frac{B}{A}$

tale che $G'(x) = \frac{D}{Ax+B}$ $x \in \left(-\frac{B}{A}, +\infty\right)$

$\boxed{Ax+B>0}$

$f(x) = \frac{D}{Ax+B}$ non è definita per $x = -\frac{B}{A}$

$Ax+B=0$

$-$ $\quad -B/A \quad$ $+$

$$G(x) = D \lg(Ax+B)$$

$$G'(x) = D \, \frac{1}{Ax+B} \cdot (A \cdot 1 + 0) = \frac{D}{Ax+B} \cdot A$$

$$G(x) = \frac{D}{A} \underbrace{\lg(Ax+B)}$$

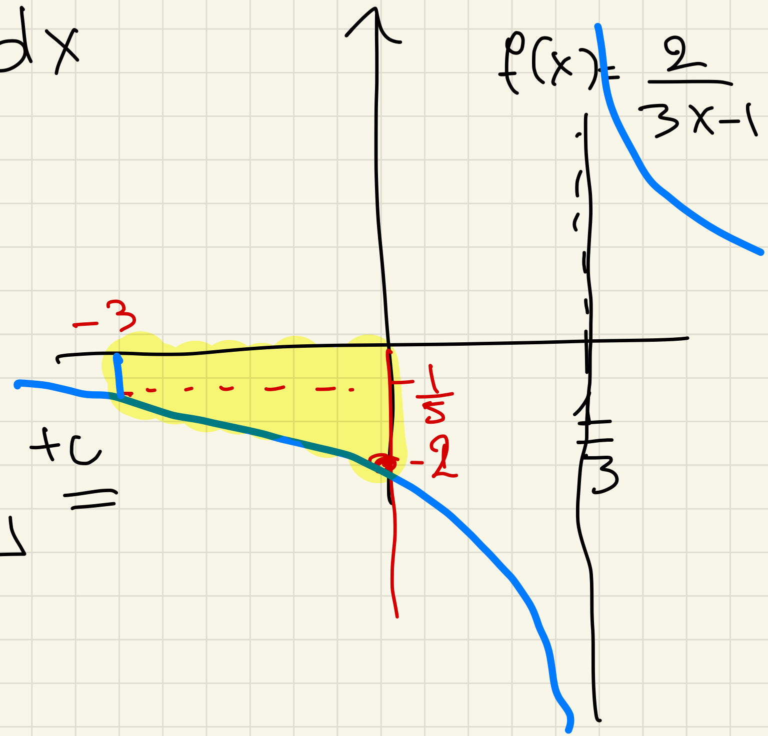
$$G'(x) = \frac{D}{\cancel{A}} \cdot \frac{1}{(Ax+B)} \cdot \cancel{A} = \frac{D}{Ax+B}$$

$$\boxed{\int \frac{D}{Ax+B}\,dx = \frac{D}{A} \lg|Ax+B| + c}$$

Es

$$\int_{-3}^{0} \frac{2}{3x-1}\,dx$$

$$\int \frac{2}{3x-1}\,dx = \boxed{\frac{2}{3}\log|3x-1|} + c =$$



$D = 2$

$A = 3 \quad B = -1$

$$\int \frac{D}{Ax+B}\,dx = \frac{D}{A}\log|Ax+B| + c$$

$$\int_{-3}^{0} \frac{2}{3x-1}\,dx = \underbrace{\frac{2}{3}\lg|3\cdot 0-1|}_{G(0)} - \underbrace{\frac{2}{3}\lg|3\cdot(-3)-1|}_{G(-3)}$$

$$= \frac{2}{3}\lg|-1| - \frac{2}{3}\lg|-10| =$$

$$= \cancel{\frac{2}{3}\lg 1} - \frac{2}{3}\lg 10 = -\frac{2}{3}\lg 10 .$$

$\lg 1 = 0$

$$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$$

$$\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + c \qquad \forall k \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \lg|x| + c$$

per x positive

$$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5}x^{5/2} + c$$

Es

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{4}\right] - \left[2\sqrt{1}\right]$$

$$= 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,x^{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 2\,x^{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= 2\sqrt{x} + c$$

$A, B \in \mathbb{R}$ $\quad$ $k \neq -1$

$$\int (Ax+B)^k \, dx = \frac{1}{(k+1)} (Ax+B)^{k+1} \cdot \frac{1}{A} + C$$

$$\left[\frac{1}{k+1} (Ax+B)^{k+1}\right]' = \frac{1}{\cancel{k+1}} (Ax+B)^k \, \cancel{k+1} \cdot A$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$A \in \mathbb{R}$

$$\int \sin(Ax) \, dx = -\frac{1}{A} \cos(Ax) + C$$

$$\int \cos(Ax) \, dx = \frac{1}{A} \sin(Ax) + C$$

Es

$$\int_0^{\pi/2} \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin\left(3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3.0)$$

$$= \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}\sin 0}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(-1) = -\frac{1}{3}$$

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$$

$A \in \mathbb{R}$

$$\int e^{Ax}\,dx = \frac{1}{A} e^{Ax} + c$$

$$\int_0^5 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3\cdot 5}\right] - \left[-\frac{1}{3} e^{-3\cdot 0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-15} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-15}\right) > 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg}\, x + c$$

$\boxed{A, B > 0}$ $\qquad D \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{D}{A+Bx^2}\,dx$$

$$\frac{D}{A+Bx^2} = \frac{D}{A\left[1+\frac{B}{A}x^2\right]} = \frac{D}{A\left[1+\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\,x\right)^2\right]}$$

$$\left[\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\,x\right)\right]' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\,x\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{B}{A}}$$

$$\int \frac{D}{A+Bx^2}\,dx = \frac{D}{A}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x\right)\cdot\sqrt{\frac{A}{B}} + c =$$

$$= \frac{D}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\,x\right) + c$$

$$\left(\frac{D}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\,x\right)\right)' = \frac{D}{\sqrt{A}\cdot\cancel{\sqrt{B}}}\cdot\frac{1}{1+\frac{Bx^2}{A}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{B}}{A}} =$$

$$= \frac{D}{\cancel{A}}\cdot\frac{1}{\frac{A+Bx^2}{\cancel{A}}}$$

es $\int_2^3 \frac{2}{3+x^2}\,dx$

$D = 2$

$A = 3 \qquad B = 1$

$\downarrow$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{1}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x \right]_2^3 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2$$