UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I
Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Derivata seconda, concavità e convessità di funzioni. Studio di funzione.

Tutor: Guido Costagliola
Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them".

-J. Fourier

1 Studio della derivata seconda

1.1 Esercizio 1

Determinare gli intervalli di concavità, convessità e i punti di flesso delle seguenti funzioni $f(x)$.

$$(a)\quad x^3 - 3x^2 \qquad (b)\quad (x^2+x)e^{-x} \qquad (c)\quad \frac{1}{x^2+3}$$

2 Studio di funzione

2.1 Esercizio 2

Studiare le seguenti funzioni $f(x)$, cercando di discutere per ciascuna:

- Dominio $\mathcal{D}$ e limiti agli estremi finiti ed infiniti del dominio;
- Eventuali asintoti e loro tipologia;
- Punti di derivabilità e calcolo della derivata prima;
- Limiti notevoli della derivata, ovvero limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;
- Segno della derivata ed intervalli di monotonia di $f(x)$;
- Punti di estremo e loro natura;
- Grafico qualitativo della funzione.

1.
$$f(x) = e^{-|x^2-1|}$$

2.
$$f(x) = \arctan\left(\frac{2(x-1)}{|x|}\right) - \frac{x-1}{2}$$

3.
$$f(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + 6\arctan x - \log(|x+1|)$$

Soluzioni

Studio della derivata seconda

Esercizio 1

(a) Il calcolo di derivata prima e seconda resituisce:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

La derivata seconda si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$. Pertanto $x = 1$ è l'unico punto di flesso di $f(x)$, la funzione è convessa in $(1, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 1)$.

(b) Il calcolo di derivata prima e seconda resituisce:

$$f'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2+x)e^{-x} = (-x^2+x+1)e^{-x}$$
$$f''(x) = (-2x+1)e^{-x} - (-x^2+x+1)e^{-x} = (x^2-3x)e^{-x} = x(x-3)e^{-x}$$

La derivata seconda si annulla in $x = 0$ e $x = 3$, è positiva in $x < 0$ e $x > 3$, dove la funzione è convessa, e negativa in $0 < x < 3$, dove la funzione è concava. I punti di flesso sono $x = 0$ e $x = 3$.

(c) Il calcolo di derivata prima e seconda resituisce:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$
$$f''(x) = \frac{-2(x^2+3)^{\cancel{2}} + 8x^2\cancel{(x^2+3)}}{(x^2+3)^{\cancel{4}3}} = \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3} = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

La derivata seconda si annulla in $x = \pm 1$, punti di flesso per $f(x)$, è positiva in $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, intervallo di convessità della funzione, e negativa in $(-1, 1)$, intervallo di concavità della funzione.

Studio di funzione

Esercizio 2

1. Notiamo innanzitutto che la funzione è pari, dunque basterà studiarla nell'intervallo $[0, +\infty)$ e per i valori negativi di x i risultati si potranno dedurre dalla parità.
   Il dominio è $\mathbb{R}$. Ricordando la definizione di modulo, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} & \text{se } x \geq 1 \vee x \leq -1, \\ e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

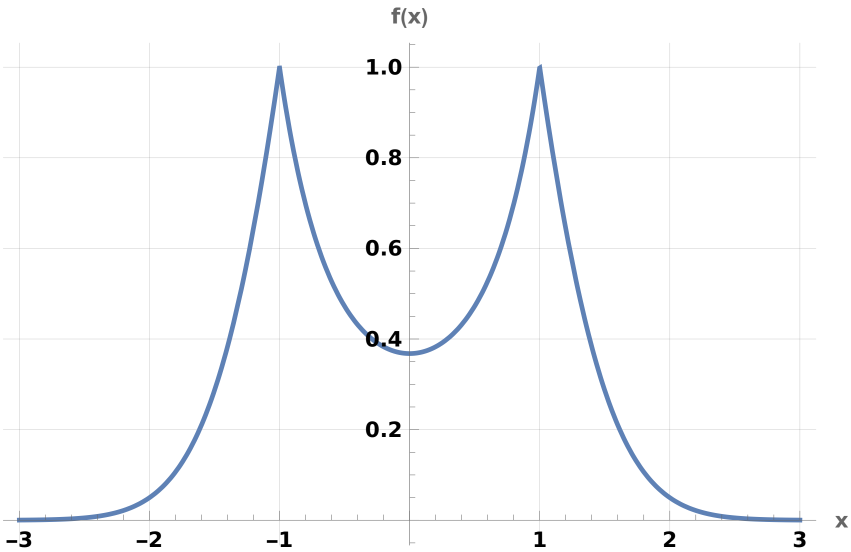
Risulta che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la funzione. Non vi sono asintoti verticali né obliqui.
Per quanto riguarda la derivabilità:

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{1-x^2} & \text{se } x > 1 \vee x < -1, \\ 2xe^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Controlliamo la derivabilità in $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2xe^{x^2-1} = 2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2xe^{x^2-1}) = -2$$

I limiti di derivata destra e sinistra in $x = 1$ esitono ma non coincidono, pertanto la funzione non è derivabile in $x = 1$, che è un punto angoloso. Discorso analogo, per parità, per il punto $x = -1$. La funzione $f(x)$ risulta allora derivabile in $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$.
Studiamo il segno della derivata e dunque gli intervalli di monotonia di $f(x)$. Si ha $f'(x) = 0$ per $x = 0$. Stando attenti agli intervalli di definizione, $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$. Pertanto la funzione è crescente in $(0, 1)$ e decrescente in $(1, +\infty)$. La situazione per gli $x < 0$ sarà contraria in quanto $f'(x)$ è dispari (**Nota:** la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa).
Per quanto riguarda i punti di estremo, l'unico punto stazionario è $x = 0$, che è un punto di minimo locale, non globale in quanto $f(0) = 1/e$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. I punti $x = \pm 1$ sono invece di massimo globale.
Il grafico della funzione si presenta come segue.



2. Ricordiamo inizialmente che $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e che $\arctan(-x) = -\arctan x$. Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}/\{0\}$ e per la definizione di modulo si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2(x-1)}{x}\right) - \frac{x-1}{2} & \text{se } x \geq 0, \\ -\arctan\left(\frac{2(x-1)}{x}\right) - \frac{x-1}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

I limiti all'infinito e agli estremi finiti del dominio sono:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{\arctan\left(\frac{2(x-1)}{x}\right)}_{\to\arctan(2)} - \underbrace{\frac{x-1}{2}}_{\to+\infty} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\underbrace{-\arctan\left(\frac{2(x-1)}{x}\right)}_{\to\arctan(2)} - \underbrace{\frac{x-1}{2}}_{\to-\infty} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left[\underbrace{\arctan\left(\frac{2(x-1)}{x}\right)}_{\to-\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{x-1}{2}}_{\to-\frac{1}{2}} \right] = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \left[-\underbrace{\arctan\left(\frac{2(x-1)}{x}\right)}_{\to\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{x-1}{2}}_{\to-\frac{1}{2}} \right] = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$$

Nota: la funzione sarebbe estendibile per continuità in $x = 0$.
La funzione non presenta asintoti orizzontali né verticali. Per quanto riguarda asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right) = \pm\arctan(2) + \frac{1}{2}$$

Pertanto $y = -\frac{x}{2} + (\arctan(2) + \frac{1}{2})$ è asintoto obliquo destro e $y = -\frac{x}{2} + (-\arctan(2) + \frac{1}{2})$ è asintoto obliquo sinistro per la funzione $f(x)$.
Per quanto riguarda la derivabilità:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+4(x-1)^2} - \frac{1}{2} & \text{se } x > 0, \\ \frac{-2}{x^2+4(x-1)^2} - \frac{1}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O analogamente:

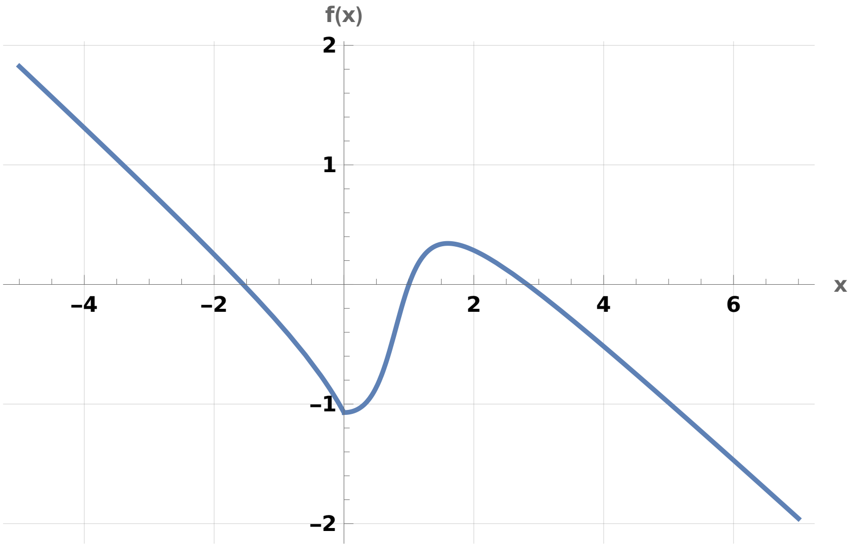
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-5x^2+8x}{2x^2+8(x-1)^2} & \text{se } x > 0, \\ -\frac{4+x^2+(2x-2)^2}{2x^2+8(x-1)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcolando i limiti di derivata destra e sinistra in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$$

La funzione, che non è definita per $x = 0$, non sarebbe ivi comunque derivabile in quanto i limiti sopra esitono ma non coincidono.
Discutendo la monotonia della funzione, per $x < 0$ la derivata risulta sempre negativa, dunque la funzione è decrescente in $(-\infty, 0)$, invece per $x > 0$ la derivata risulta positiva in $(0, \frac{8}{5})$ e negativa in $(\frac{8}{5}, +\infty)$. L'unico punto stazionario è $x = \frac{8}{5}$, che risulta un massimo locale (non globale).
Il grafico della funzione si mostra come segue.



3. La funzione può essere riscritta come:

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + 6\arctan x - \frac{1}{2}\log(x+1)^2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x^2}{x^2+2x+1}\right) + 6\arctan x$$

Il dominio è $\mathbb{R}/\{-1\}$ e i limiti agli estremi finiti ed infiniti del dominio sono:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3\pi$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3\pi$$

$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = +\infty$$

Pertanto $y = 3\pi$ e $y = -3\pi$ sono rispettivamente asintoti orizzontali destro e sinistro, mentre $x = -1$ è asintoto verticale. Non ci sono asintoti obliqui.
Per quanto riguarda la derivabilità:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{6}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}$$

e risulta

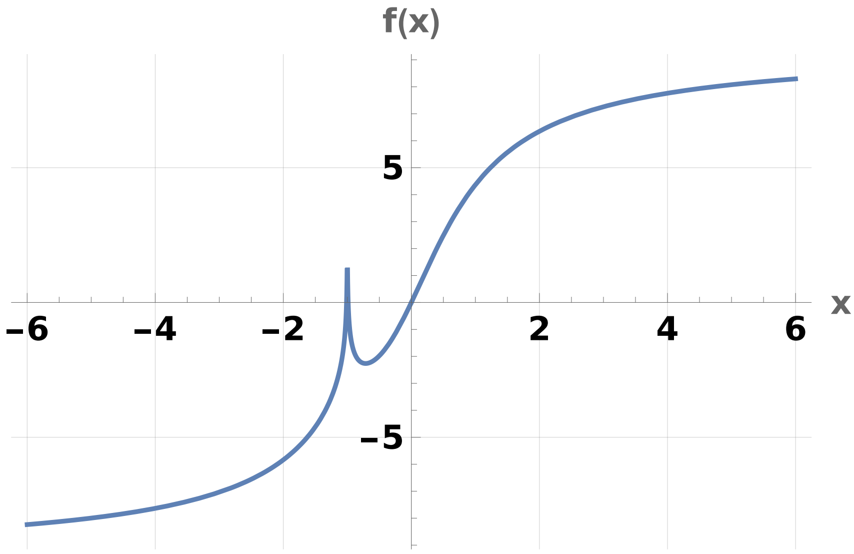
$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty$$

La funzione $f(x)$ è derivabile ovunque in $\mathbb{R}$ tranne che in $x = -1$, in cui non è nemmeno definita.
Studiando il segno della derivata:

$$f'(x) = \frac{(x+6)(x+1) + (1+x^2)}{(1+x^2)(x+1)} = \frac{7x+5}{(1+x^2)(x+1)}$$

essa risulta positiva ($f(x)$ crescente) in $(-\infty, -1)$ e $\left(-\frac{5}{7}, +\infty\right)$ e negativa ($f(x)$ decrescente) in $\left(-1, -\frac{5}{7}\right)$.
L'unico punto stazionario è $x = -\frac{5}{7}$, che è un minimo locale (non globale), infatti $f\left(-\frac{5}{7}\right) > -3\pi$.
Il grafico della funzione è il seguente.



Anche se dal plot non si nota, in $x = -1$ vi è un asintoto verticale