UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I
Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Calcolo della derivata prima di funzioni e loro punti di estremo. Teoremi di Rolle, Lagrange e De l'Hôpital.

Tutor: Guido Costagliola
Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"There's no sense in being precise
when you don't even know
what you're talking about".

-J. von Neumann

1 Calcolo differenziale

1.1 Esercizio 1

Calcolare la derivata prima $f'(x)$ delle seguenti funzioni.

1. $$(a)\ \frac{x^2-1}{x(x+2)} \qquad (b)\ x\sqrt{1+x^2} \qquad (c)\ \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

2. $$(a)\ \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \qquad (b)\ \log(x^2-\sin x) \qquad (c)\ \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1.2 Esercizio 2

Trovare, se esistono, i punti di massimo e di minimo (relativi o assoluti) delle seguenti funzioni.

1. $$(i)\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (ii)\ x-\arctan x$$

2. $$(i)\ 2xe^{1-\frac{x}{2}} \qquad (ii)\ \sin x - \cos x$$

2 Applicazione dei teoremi di Rolle e Lagrange

2.1 Esercizio 1

Determinare i valori da assegnare ai parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo tale che il teorema di Rolle sia applicabile alla seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+ax-1 & \text{se } x \in [-2,1], \\ bx^3-2x+c & \text{se } x \in (1,3]. \end{cases}$$

2.2 Esercizio 2

Qual è il punto $p \in \mathbb{R}$ che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange per la funzione:

$$f(x) = \sqrt{7-x}$$

nell'intervallo $\mathcal{I} = [4,7]$?

3 Calcolo di limiti con De l'Hôpital

Calcolare i seguenti limiti di funzione utilizzando opportunamente il teorema di De l'Hôpital.

1. $(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x + x^2} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} \qquad (c)\quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}$

2. $(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(e^x - e^{-x}\right) - 1}{\arctan(x^2)} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\sqrt{1-x^2}+x) - x}{x^2}$

Soluzioni

Calcolo differenziale

Esercizio 1

Calcoliamo singolarmente le derivate sfruttando le opportune regole di derivazione.

1.

$$(a)\quad f'(x) = \frac{2x \cdot x(x+2) - (2x+2)(x^2-1)}{x^2(x+2)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 4x^2 \cancel{-2x^3} + 2x - 2x^2 + 2}{x^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+2}{x^2(x+2)^2}$$

$$(b)\quad f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(c)\quad f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\cancel{x^2} - 1 \cancel{-x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= (\sqrt{1+x^2}-x) \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1\cancel{+x^2}\cancel{-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2.

$$(a)\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b)\quad f'(x) = \frac{2x - \cos x}{x^2 - \sin x}$$

$$(c)\quad f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} =$$

$$= -\frac{\cancel{(1+x)}}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{2(1+x)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Esercizio 2

Il procedimento generale da seguire è il seguente:

- Calcolare la derivata prima delle funzioni e risolvere $f'(x) = 0$ per trovare i *punti critici* (o *stazionari*);
- Studiare il segno della derivata $f'(x)$ per determinarne la natura (punti di massimo o minimo);
- Dallo studio della derivata e dei limiti della funzione a $\pm\infty$ e agli estremi finiti del dominio determinare se si trattano di estremi *locali* o *globali*.

Applichiamolo in concreto.

1. (i) Il dominio della funzione è $x > 1 \vee x < -1$, mentre la derivata prima è $f'(x) = \frac{x(x^2-2)}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. Si noti che il dominio della derivata è lo stesso della funzione.
   Ponendo $f'(x) = 0$, troviamo che i punti stazionari sono $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Anche $x = 0$ sarebbe una soluzione dell'equazione $f'(x) = 0$, ma questo non è contenuto all'interno del dominio.
   Studiando il segno della derivata, vediamo che questa è positiva ($\Rightarrow$ funzione crescente) negli intervalli $(-\sqrt{2}, -1)$ e $(\sqrt{2}, +\infty)$, mentre è negativa ($\Rightarrow$ funzione decrescente) negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{2})$ e $(1, \sqrt{2})$.
   Segue che sia $x = \sqrt{2}$ che $x = -\sqrt{2}$ sono punti di minimo. Visto poi che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, che $\lim_{x\to\pm 1} f(x) = +\infty$ e considerato l'andamento della funzione, si conclude che si tratta di punti di minimo assoluto (o globale).
   In particolare il minimo è $f(\pm\sqrt{2}) = 2$. Si noti che la funzione è pari, dunque ci si poteva aspettare due punti stazionari con la stessa natura.

   (ii) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e la derivata risulta $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. L'equazione $f'(x) = 0$ è soddisfatta solo da $x = 0$, punto stazionario. Tuttavia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque la funzione è sempre crescente e $x = 0$ non è un punto di massimo né di minimo. Esso è in realtà un punto di flesso a tangente orizzontale.

2. (i) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e il calcolo della derivata restituisce $f'(x) = (2-x)e^{1-\frac{x}{2}}$. L'unico punto stazionario, che soddisfa $f'(x) = 0$, è $x = 2$.
   Studiando il segno della derivata, osservando che l'esponenziale è sempre positivo, vediamo che questa è positiva per $x < 2$ e negativa per $x > 2$. Dunque la funzione è crescente fino ad $x = 2$ per poi essere decrescente. Si conclude che $x = 2$ è un punto di massimo.
   Dato che poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(2) = 4$, si tratta di un punto di massimo assoluto.

   (ii) Essendo la funzione periodica, di periodo $T = 2\pi$, studiamo i punti di estremo solo nell'intervallo $\mathcal{I} = [0, 2\pi]$.
   La derivata della funzione è $f'(x) = \cos x + \sin x$ e $f'(x) = 0 \iff \cos x = -\sin x$ è verificata per $x = \frac{3}{4}\pi$ e per $x = \frac{7}{4}\pi$, infatti questi sono i valori in cui le funzioni seno e coseno sono eguali in modulo ma opposte in segno.
   Studiando il segno della derivata $f'(x) \geq 0$, vediamo che questa è positiva per $x \in [0, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ e negativa per $x \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$ (**Nota:** consiglio di risolvere graficamente $f'(x) \geq 0$).
   Visto l'andamento della funzione, si conclude che $x = \frac{3}{4}\pi$ è un punto di massimo assoluto e $x = \frac{7}{4}\pi$ è un punto di minimo assoluto. Rispettivamente massimo e minimo sono: $f(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}$ e $f(\frac{7}{4}\pi) = -\sqrt{2}$.

Applicazione dei teoremi di Rolle e Lagrange

Esercizio 1

Il *teorema di Rolle* afferma che, data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), se $f(a) = f(b)$, allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale per cui $f'(x_0) = 0$.

Passiamo alla risoluzione dell'esercizio. Per trovare i valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui il teorema sia applicabile, bisogna imporre tre condizioni:

- $f(-2) = f(3)$;
- continuità di $f(x)$ in $[-2, 3]$;
- derivabilità di $f(x)$ in $(-2, 3)$.

Partiamo dalla prima condizione. Si ha che $f(-2) = 7 - 2a$ e $f(3) = 27b - 6 + c$, dunque imponendo la condizione $f(-2) = f(3)$ si trova che $2a + 27b + c = 13$.

La funzione non ha problemi di continuità in nessun punto dell'intervallo $[-2, 3]$, eccetto che in $x = 1$, dove dobbiamo imporla. Si ha che:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 + ax - 1) = a + 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (bx^3 - 2x + c) = b + c - 2$$

Per richiedere la continuità dobbiamo allora porre: $a + 1 = b + c - 2 \iff a - b - c = -3$.

L'ultima condizione è la derivabilità. La funzione non ha problemi di derivabilità in nessun punto tranne che in $x = 1$. Per richiedere la derivabilità è sufficiente calcolare i limiti delle derivate destra e sinistra per $x \to 1^\pm$ ed eguagliarli. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{se } x \in [-2, 1], \\ 3bx^2 - 2 & \text{se } x \in (1, 3]. \end{cases}$$

Poi:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 4 + a$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 3b - 2$$

Eguagliandoli si trova la condizione $a - 3b = -6$.

Riassumento, bisogna trovare i valori di a, b, c che risolvano il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a - b - c = -3 \\ a - 3b = -6 \\ 2a + 27b + c = 13 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo che preferite per risolverlo, per esempio il metodo di sostituzione, si trovano i seguenti valori:

$$\begin{cases} a = -\frac{18}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Ciò conclude l'esercizio.

Esercizio 2

Il *teorema di Lagrange* afferma che, data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), $\exists x_0 \in (a, b)$ tale per cui $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$.

Nota: se $f(b) = f(a)$ si ritrova il teorema di Rolle.

Il dominio della funzione $f(x)$ è $\mathcal{D} = (-\infty, 7]$. La funzione non ha problemi di continuità in $\mathcal{I} = [4, 7]$. La derivata risulta $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{7-x}}$ ed è perfettamente definita in $(4, 7)$. Agli estremi dell'intervallo si ha: $f(4) = \sqrt{3}$ e $f(7) = 0$, per cui:

$$f'(p) = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2\sqrt{7 - p}}$$

Risolvendo l'equazione si trova:

$$\sqrt{7 - p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 7 - p = \frac{3}{4} \iff p = \frac{25}{4} \in (4, 7)$$

.

Dunque $p = \frac{25}{4}$ è il valore ricercato.

Calcolo di limiti con De l'Hôpital

Risolviamo singolarmente i vari limiti. Dove è presente una H sopra l'uguale vuol dire che è stato applicato il teorema di Hôpital nel passaggio specifico.

1.

$$(a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x + x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x + 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x + 2} = \frac{1}{3}$$

$$(b) \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$$

Difatti questa non si tratta di una forma indeterminata per la quale si potrebbe applicare il teorema di De l'Hôpital. Per cui fate attenzione: prima di partire con i conti, studiate con attenzione il limite.

$$(c) \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{\arccos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{1-x^2}}}}{-\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}} = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

2.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(e^x-e^{-x}\right)-1}{\arctan(x^2)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\left(e^x-e^{-x}\right)(e^x+e^{-x})}{\frac{2x}{1+x^4}} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos\left(e^x-e^{-x}\right)(e^x+e^{-x})^2-\sin\left(e^x-e^{-x}\right)(e^x-e^{-x})}{\frac{2(1+x^4)-8x^4}{(1+x^4)^2}} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(\sqrt{1-x^2}+x)-x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}-1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-x-\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}{2x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-x^2}-x)-x}{2x(1-x^2+x\sqrt{1-x^2})} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\left(1-\sqrt{1-x^2}-x\right)}^{\to 0}+\overbrace{\sqrt{1-x^2}\left(-1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right)}^{\to -1}-1}{\underbrace{2(1-x^2+x\sqrt{1-x^2})}_{\to 2}+\underbrace{2x(-2x+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}})}_{\to 0}} = \frac{-2}{2} = -1$$