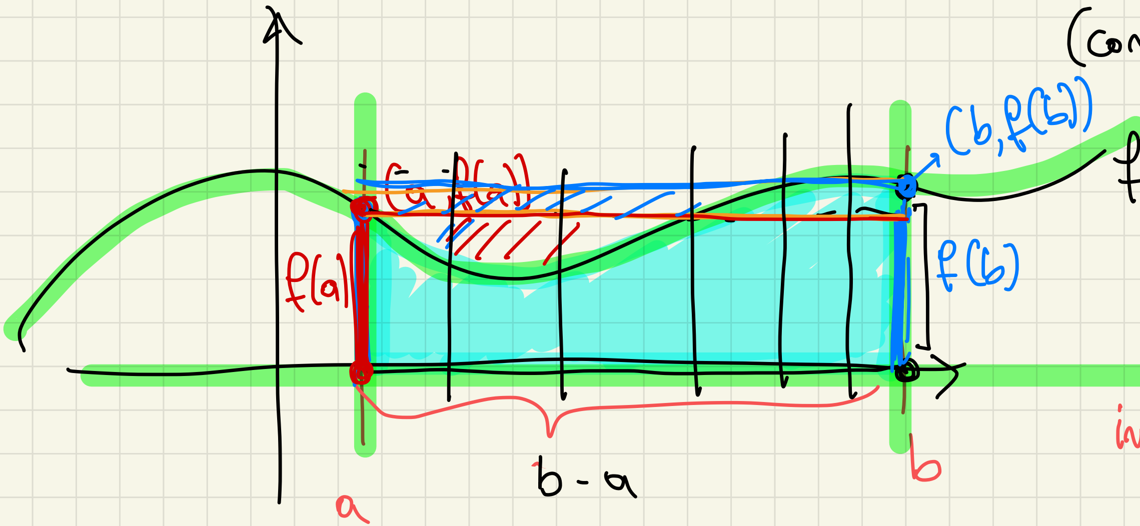
INTEGRALE DI RIEMANN

DOMANI GIOVEDÌ 5/12
ore 9 – 12.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata

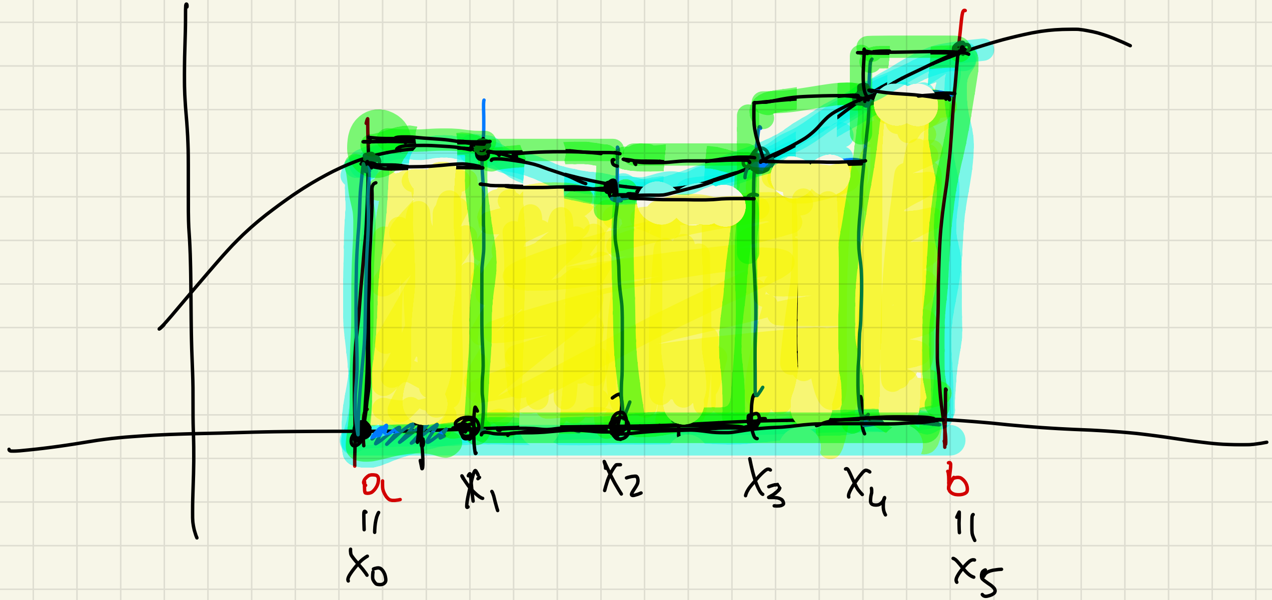
(CONTINUA)

$\boxed{f \geq 0}$

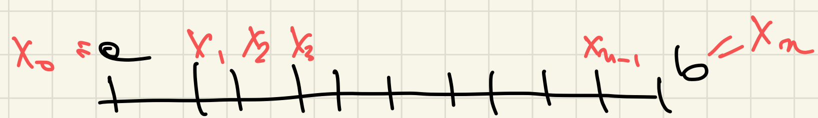


$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato.

area della zona celeste = area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle x e le 2 rette verticali $x = a$, $x = b$.



una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ è data da una famiglia finita di punti $x_0, x_2, \dots x_n \in [a,b]$ tali che $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$



in ciascun intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ trovo

$$y_m^i = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f \qquad y_M^i = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

(f continua $\to$ in ciascun intervallo chiuso e limitato, $[x_i, x_{i+1}]$, ammette massimo e minimo (TEOREMA DI WEIERSTRASS))

$$S_m = \text{somma inferiore} = \sum_{i=0} \left(\min_{[x_i, x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \min_{[x_0, x_1]} f \cdot (x_1 - x_0) + \min_{[x_1, x_2]} f \cdot (x_2 - x_1) + \dots + \left(\min_{[x_4, x_5]} f\right)(x_5 - x_4)$$

S_m è sicuramente MINORE dell'area celeste

S_M = somma superiore =

$$= \sum_{i=0}^{5} \left(\max_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) (x_{i+1} - x_i) =$$

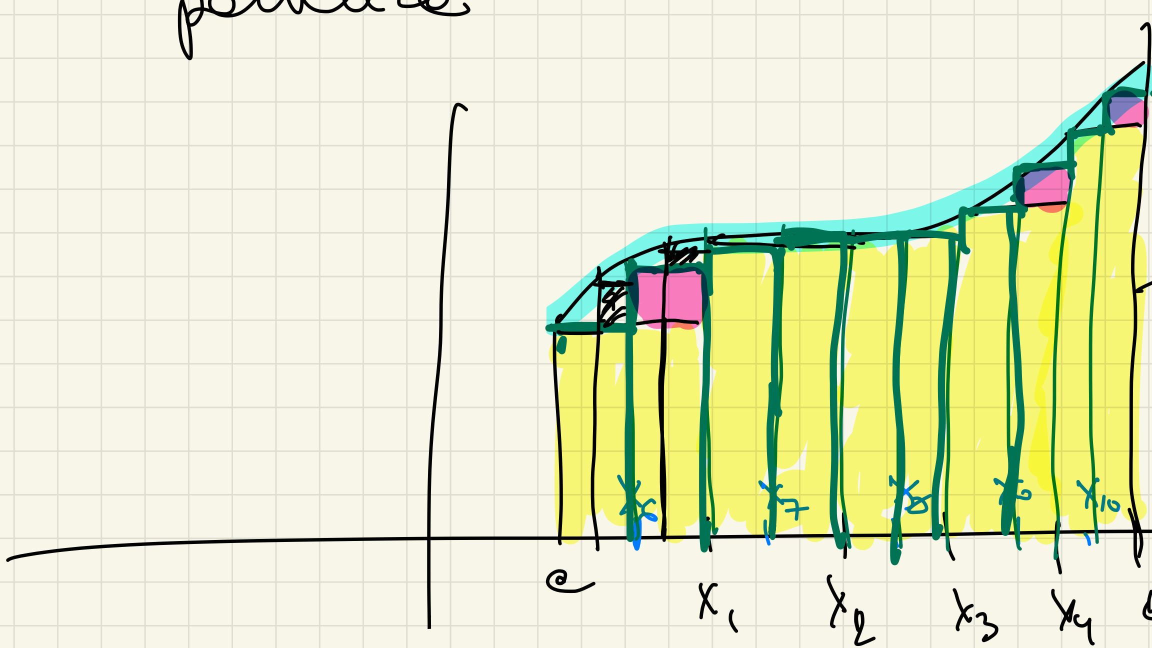
$$= \left(\max_{[x_0, x_1]} f \right) (x_1 - x_0) + \left(\max_{[x_1, x_2]} f \right) (x_2 - x_1) + \dots$$

$$+ \left(\max_{[x_4, x_5]} f \right) \cdot (x_5 - x_4)$$

S_M è maggiore dell'area celeste

$$S_m \leq \text{area celeste} \leq S_M$$

AGGIUNGO PUNTI alla suddivisione di partenza



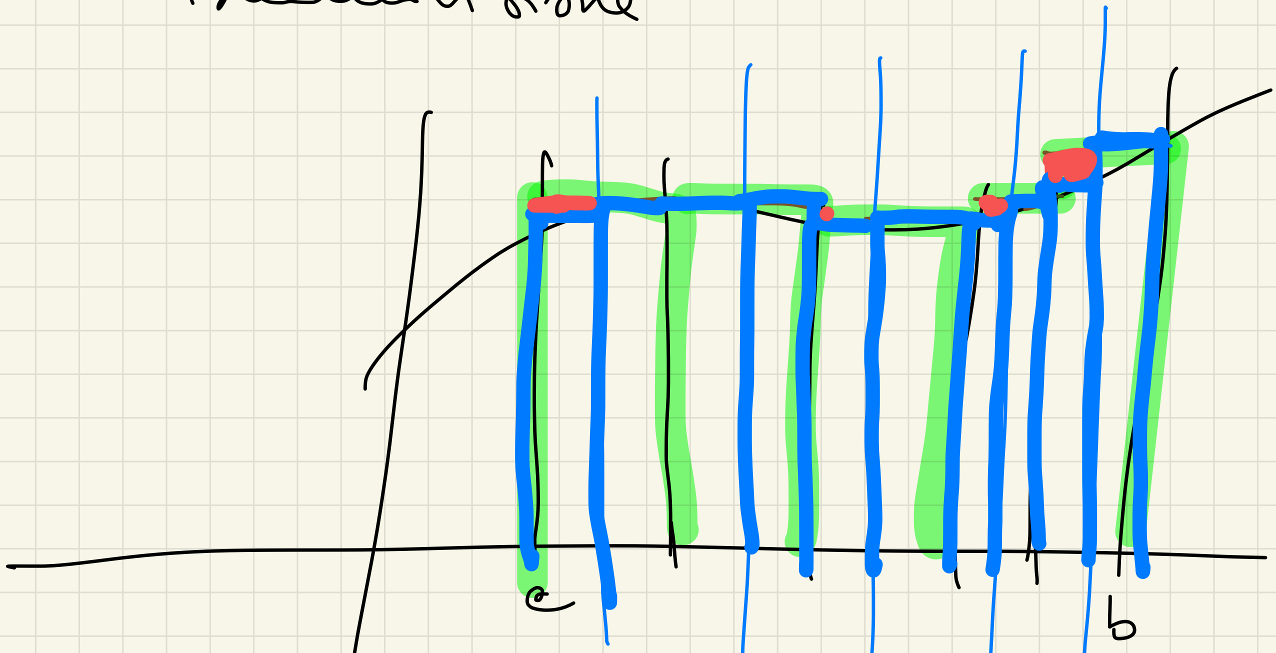
in giallo somma inferiore della nuova suddivisione.

la somma inferiore associata alla NUOVA suddivisione è sempre minore dell'area celeste, ma è MAGGIORE della somma inferiore precedente man mano che aggiungo punti alla suddivisione di partenza, la somma inferiore CRESCE

→ ho una successione CRESCENTE di somme inferiori, tutte limitate dell'area della zona celeste.

↓

existe un limite $\bar{s}$ FINITO di questa successione le somme superiori invece calano man mano che aggiungo punti alla suddivisione



somma superiore cala

le somme superiori sono una successione decrescente e limitata

↓

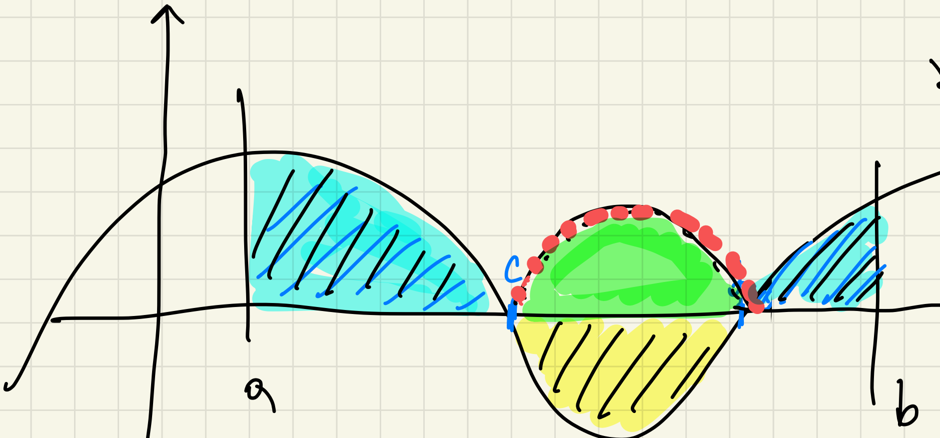
ha limite $\overline{S}$

$\overline{S}$ = limite somme superiori $\geq$ area celeste

$\underline{s}$ = limite somme inferiori $\leq$ area celeste

se $\boxed{\underline{s} = \overline{S} = \text{area celeste} = \int_a^b f(x)\,dx}$

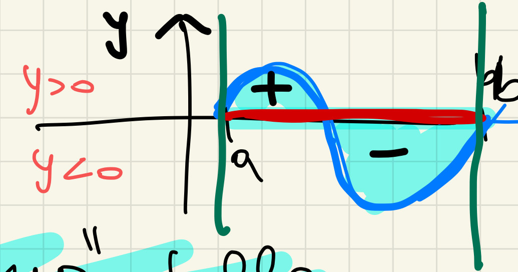
si dice che la funzione è INTEGRABILE



se f non è positiva

area gialla = − area verde

$\int_a^b f(x)\,dx$ = somma delle 2 aree celesti + area verde = somma aree celesti − area gialla se f è continua in $[a,b]$



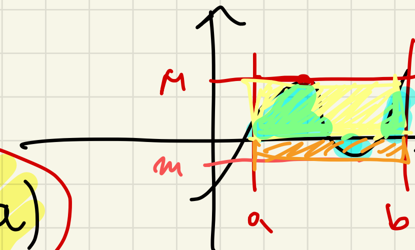
$\int_a^b f(x)dx$ = area "con segno" della regione compresa tra grafico f e asse delle x (tra le 2 rette verticali $x=a$, $x=b$)

area con segno: zone che stanno nel semipiano $y>0$ sono contate con segno $+$ e zone che stanno nel semipiano $y<0$ sono contate con segno $-$.

Teorema Se f è continua in $[a,b]$

esiste $\int_a^b f(x)\,dx$ = NUMERO REALE

(positivo o negativo) che è uguale all'area con segno della zona compresa tra grafico di f e asse x.

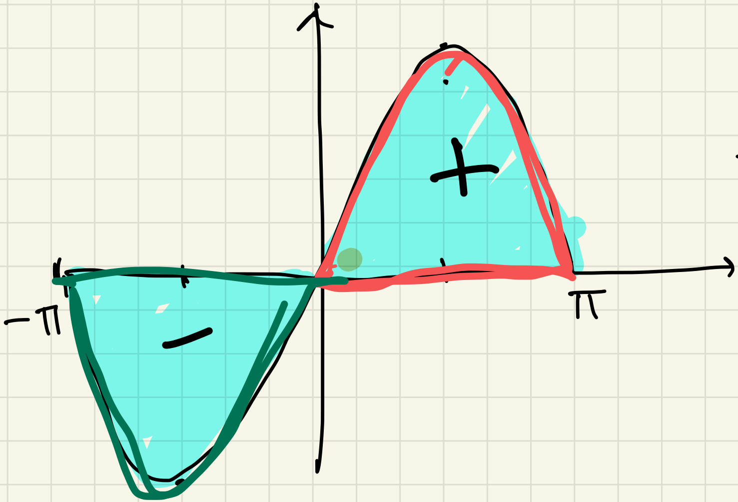


$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m = \min_{[a,b]} f \qquad M = \max_{[a,b]} f$$

[m, M esistono sempre per WEIERSTRASS]

Come conseguenza $\sin x$ è continua in $[-\pi, \pi]$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$$

area con + =

area con −

In generale se f è CONTINUA e dispari in $[-a, a]$ allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

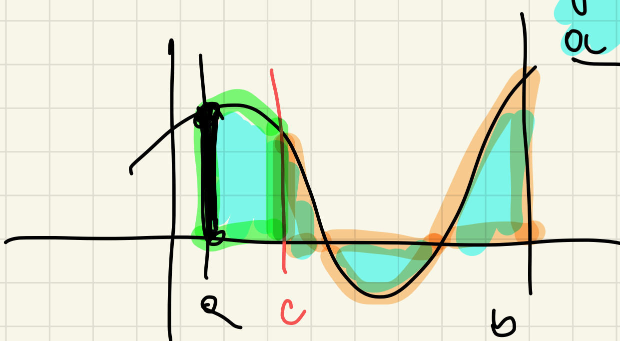
Proprietà dell'integrale

$[a,b]$ chiuso e limitato , $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

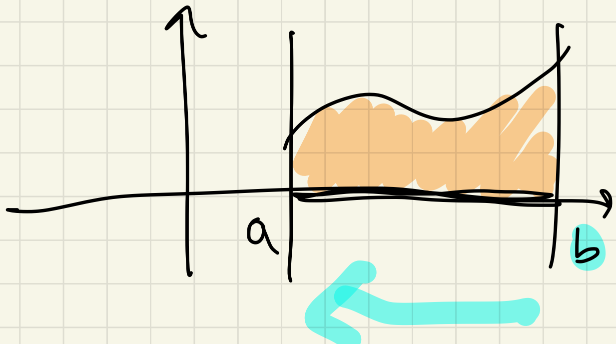
(1) $\left(\min_{[a,b]} f\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \left(\max_{[a,b]} f\right)(b-a)$

(2) $\forall\ c \in (a,b)$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$



4) $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

(INTEGRALE "MANTIENE" IL SEGNO

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

5)

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$