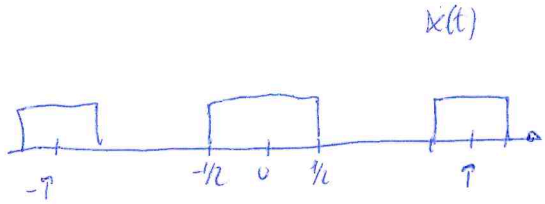
Trasformata di Fourier a Tempo continuo

1) Introduzione e giustificazione euristica

La Trasformata di Fourier a Tempo continuo, o semplicemente Trasformata di Fourier (TF) permette di rappresentare i segnali non periodici in Termini di esponenziali immaginari puri

Vediamone una giustificazione euristica

Sia $x(t) = \mathrm{rep}_T\, \mathrm{rect}(t)$, con $T > 1$



Quando $T \to \infty$ le repliche si allontanano e x "tende" a un segnale aperiodico

Vediamo che succede ai coeff. a_k della SdF. di x al crescere di T.

Osserviamo che la norma di x in $(-T/2, T/2)$ è $\int_{-T/2}^{T/2} |\mathrm{rect}(t)|^2 dt = 1$

Allora per Parseval $\| a_k \|_2^2 = 1/T$

Quindi per $T \to \infty$, $\| a_k \|_2 \to 0$, i coeff. sono infinitesimi:

per $k \neq 0$, $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{rect}(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{-jk\frac{2\pi}{T}} \right]_{-1/2}^{-1/2} = \to$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{j\frac{k\pi}{T}} - e^{-j\frac{k\pi}{T}}}{2j\,\frac{k\pi}{T}} = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{T}\right)}{\pi \frac{k}{T}} = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}(k f_0)$$

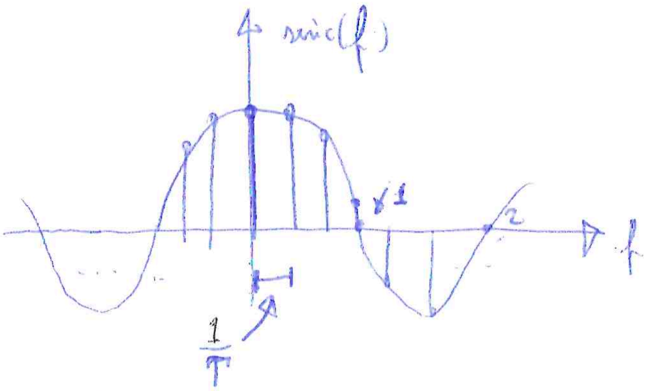
$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

Noi vorremmo studiare il comportamento di a_k per $T \to +\infty$, ma in questo modo $\|x\|_2 \to 0$ e anche gli a_k tendono a zero

Allora studiamo l'andamento di $b_k = T \cdot a_k$

(i b_k sono i coeff. di $y(t) = T \cdot \mathrm{rep}_T\, \mathrm{rect}(t)$)

$b_k = \mathrm{sinc}(k f_0)$



Quindi i b_k si calcolano tracciando sinc(f) e campionandola per $f = k f_0 = k \frac{1}{T}$

Al crescere di T, stiamo campionando sinc(f) sempre più fittamente. Per $T \to \infty$, ci servono <u>tutti</u> i valori di sinc(f) per ricostruire la funzione rect

Quindi l'intuizione è che, passando da a_k ad una funzione di variabile continua (sia f oppure $\omega = 2\pi f$), si riesca a ricostruire anche una funzione non periodica

Nel seguito, passeremo dalle considerazioni intuitive alla descrizione matematica rigorosa.

Definizione di Trasformata di Fourier a Tempo continuo

La Trasformata di Fourier a Tempo continuo, o più comunemente "Trasformata di Fourier" (TF) è definita in questi Termini:

Sia $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e si consideri l'integrale

$$\omega \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (1)$$

Se converge (in senso proprio o generalizzato) allora la regola che associa ad ω l'integrale (1) è detta Trasformata di Fourier (TF) di x, ed è indicata con la maiuscola:

$$X: \omega \in \mathbb{R} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

A volte, si usa $X(f) = X(\omega)\big|_{\omega = 2\pi f} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

ω è detta pulsazione, f è detta frequenza

Condizione sufficiente per l'esistenza della TF

Se $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ allora l'integrale (1) converge ad un valore finito $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ e la regola $X(\omega)$ è una funzione uniformemente continua in $\mathbb{R}$ e asintoticamente nulla

$$|X(\omega)| \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0$$

Dimostriamo solo la convergenza dell'integrale:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t)\, e^{-j\omega t} \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot |e^{-j\omega t}|\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt = \|x\|_1 < +\infty \quad \text{per definizione di } \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

<u>Teoremi d'inversione</u>

1) Se $x(t)$ è $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e continua a tratti con derivata continua a tratti in ogni intervallo finito di $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2} \qquad (2)$$

In altre parole, è possibile ricostruire x dalla sua TF X tranne che nei punti (eventuali) di discontinuità, dove l'integrale (2) converge alla media dei limiti dx e sx

2) Se $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ l'integrale $\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$ converge in norma a x

Possiamo scrivere $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$ <u>quasi ovunque</u>

Inoltre $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e $\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|X\|_2^2$ (Parseval)

e se $y \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X, Y \rangle$ (Plancherel)

<u>SENZA DIM.</u>

Formule di analisi e sintesi

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (3) \qquad \Leftrightarrow X(\omega) = \mathcal{F}[x](\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (4) \qquad \Leftrightarrow x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X](t)$$

Le formule (3) e (4) sono rispettivamente dette formula di analisi e formula di sintesi

Abbiamo enunciato delle condizioni sufficienti per la convergenza degli integrali; inoltre il tipo di convergenza dipende dal teorema d'inversione che possiamo usare.

Inoltre la TF può calcolarsi anche per segnali non L^2 né L^1: in tal caso possiamo aspettarci come risultato un segnale generalizzato (cioè che include degli impulsi)

Vedremo quindi vari casi in cui si può calcolare la TF e applicare l'inversione.
In pratica ciò è possibile per tutti i segnali d'interesse, a patto di poter considerare anche segnali generalizzati

Esempi

1) La RF di un sistema LTI stabile è la TF della risposta impulsiva

DIM. $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$: coincide con la formula di sintes-

2) TF del segnale rect

Se $x(t) = \mathrm{rect}(t)$, abbiamo

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t}\, dt \begin{cases} \xrightarrow{\omega=0} 1 \\ \xrightarrow{\omega\neq 0} \left[\dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{t=-1/2}^{t=1/2} \end{cases}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}}{(-2j)\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega}{2\pi}\right)}{\pi \frac{\omega}{2\pi}} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Siccome $\mathrm{sinc}(0) \triangleq 1$ (estensione per continuità)

possiamo dire che $X(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

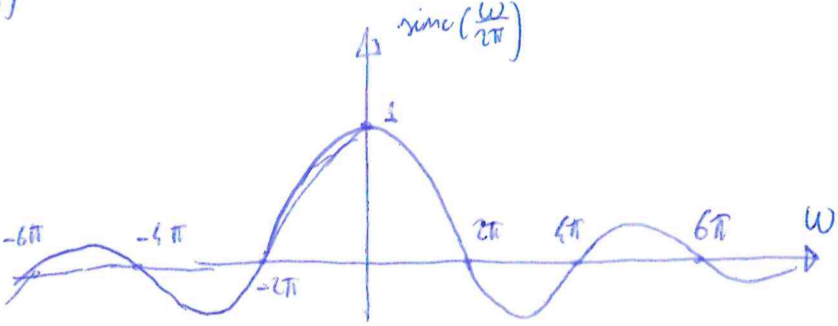
Grafico del $\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{sinc}(k) = \delta_{\text{Kronecker}}(k)$

cioè $\mathrm{sinc}(0) = 1$

e se $\frac{\omega}{2\pi} = k \Leftrightarrow \omega = 2k\pi$,

allora $\mathrm{sinc}(\omega) = 0$



Osserviamo che $X \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ e $|X(\omega)| \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0$

3) T.F. di $x(t) = e^{-\sigma t} u(t)$ con $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$

7

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

Notare che $\sigma \neq 0$

$$= \left[\frac{e^{-(\sigma + j\omega)t}}{-(\sigma + j\omega)} \right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-(\sigma + j\omega)} = \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

4) T.F. di $x(t) = -e^{-\sigma t} u(-t)$ con $\sigma \in \mathbb{R}_0^-$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\sigma t} u(-t) \cdot e^{-j\omega t} dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt =$$

$\sigma \neq 0$

$$= \left[\frac{e^{-(\sigma + j\omega)t}}{\sigma + j\omega} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\sigma + j\omega} - 0 = \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

Notare che il segno di σ ci dice quale tra $e^{-\sigma t} u(t)$ e $-e^{-\sigma t} u(-t)$ è la funzione di cui $\frac{1}{\sigma + j\omega}$ è la TF

4) $x(t) = e^{-\sigma |t|}$ con $\sigma > 0$

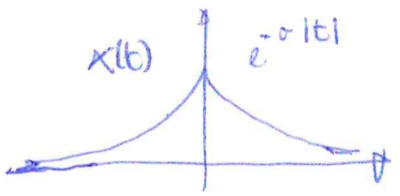
Notiamo che $x(t) = e^{-\sigma |t|} = e^{-\sigma t} u(t) + e^{\sigma t} u(-t)$

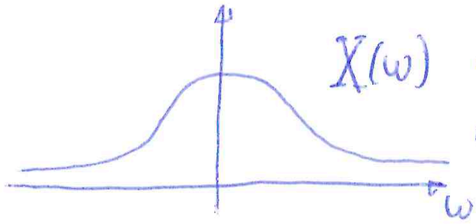
$$= e^{-\sigma t} u(t) + e^{-(-\sigma)t} u(-t)$$

Ora la TF è evidentemente un operatore lineare (vd. proprietà della TF più avanti), quindi

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left[e^{-\sigma t} u(t) \right] - \mathcal{F}\left[-e^{-(-\sigma)t} u(-t) \right] =$$ $\boxed{\begin{matrix}\sigma > 0 \\ -\sigma < 0\end{matrix}}$

$$= \frac{1}{\sigma - j\omega} - \frac{1}{-\sigma - j\omega} = \frac{1}{\sigma - j\omega} + \frac{1}{\sigma + j\omega} = \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$$





$X(\omega) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ e $X \xrightarrow[|\omega|\to\infty]{} 0$

Trasformata di Fourier di segnali periodici

I segnali periodici hanno energia infinita su $\mathbb{R}$ e non sono assolutamente integrabili, quindi non appartengono né a $L^2(\mathbb{R})$ né a $L^1(\mathbb{R})$.

Tuttavia è possibile calcolarne la TF in <u>senso generalizzato</u> cioè usando la delta di Dirac.

Consideriamo infatti: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

Da una parte, per la proprietà del campionamento, questo integrale è uguale a $e^{j\omega_0 t}$ ...

Dall'altra, confrontandolo con la formula di sintesi:

$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)\right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Quindi $2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$ è la TF di $e^{j\omega_0 t}$

Dimostrazione alternativa (opzionale)

Vogliamo mostrare che, se $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, allora $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ è uguale a $2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$.

Per fare ciò, usiamo la proprietà del campionamento:

- se $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \cap C^1(\mathbb{R})$ (cioè assolutamente integrabile, a energia finita e continua, derivabile e con derivata continua su $\mathbb{R}$)
- detto $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} d\omega$
- allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) X(\omega) d\omega = 2\pi f(\omega_0)$ (5)

Se riusciamo a provare la (5) allora abbiamo provato che $X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$.

Abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) X(\omega) d\omega \overset{(a)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt\, d\omega \overset{(b)}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(\omega) d\omega \right] dt \overset{(c)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} F(t) dt$$

$$\overset{(d)}{=} 2\pi f(\omega_0) \qquad \text{CVD}$$

Note:

(a) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} d\omega$, formula di analisi

(b) Scambio ordine d'integrazione: Teorema di Fubini

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \mathcal{F}(f(\omega), \omega \to t) = F(t)$ formula di analisi con ruoli di ω e t invertiti

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} F(t) dt = 2\pi f(\omega_0)$ formula di sintesi e Teorema d'inversione in $\mathcal{L}^1$ con ruolo di t e ω invertito

Ora applichiamo la TF di $e^{j\omega_0 t}$ ad alcuni casi particolari!

1) TF di una costante: se $\omega_0 = 0$, $e^{j\omega_0 t} = 1$ quindi

$$\mathcal{F}(1, t \to \omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

2) Seno e coseno

$$\mathcal{F}(\cos\omega_0 t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{j\omega_0 t}) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-j\omega_0 t})$$

$$= \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\mathcal{F}(\sin\omega_0 t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) = -j\pi\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

3) Segnale periodico.

Se $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ (serie di Fourier)

allora $X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega-\omega_0)$

4) Treno d'impulsi $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

Sappiamo che $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\omega_0)$

cioè $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

Un treno d'impulsi è trasformato in un treno d'impulsi

5) Impulso $\mathcal{F}(\delta(t-t_0))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t}\,dt = e^{j\omega t_0}$

Proprietà delle TF

1) Linearità : $\mathfrak{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathfrak{F}(x) + \beta \mathfrak{F}(y)$

L'abbiamo usata già diverse volte e discende dal fatto che la TF è un operatore integrale, quindi lineare

2) Simmetrie

Usiamo la notazione seguente: $x \Rightarrow X$ significa che X è la TF di x ; inoltre usiamo R per indicare il ribaltamento:

$R[x](t) = x(-t)$.

Allora si hanno le seguenti simmetrie

2.1 $R(x) \Rightarrow R[X]$

2.2 $\bar{x} \Rightarrow \overline{R[X]}$

Da cui segue:

2.3 x reale $\Leftrightarrow$ X hermitiano

2.4 x pari $\Leftrightarrow$ X pari

2.5 x dispari $\Leftrightarrow$ X dispari

2.6 x reale e pari $\Leftrightarrow$ X reale e pari

2.7 x reale e dispari $\Leftrightarrow$ X immaginario e dispari

DIM. 2.1 Calcoliamo la TF di $x(-t)$ con il cambio di variabile $\begin{cases} \tau = -t \\ dt = -d\tau \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau)\, e^{j\omega\tau}(-d\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j(-\omega)\tau} d\tau = X(-\omega) \qquad \text{CVD}$$

2.2 Calcoliamo la TF di $\bar{x}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)\, e^{j\omega t}}\, dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt}$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(-\omega)t}\, dt} = \overline{X(-\omega)} \qquad \text{CVD}$$

2.3 Se x è reale, allora $x = \bar{x}$. Applicando la 2.2,

$x = \bar{x} \Leftrightarrow \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(\bar{x}) \Leftrightarrow X = \overline{R[X]}$ che è la def di

hermitianità

2.4 x pari $\Leftrightarrow$ $x = R[x]$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}[x] = \mathcal{F}[R[x]] \Leftrightarrow X = R[X]$

(dalla 2.1) quindi anche X è pari

2.5 x dispari $\Leftrightarrow$ $x = -R[x]$ $\Leftrightarrow$ $X = -R[X]$ (dalla 2.1) $\Leftrightarrow$ X dispari

2.6 x reale e pari $\Rightarrow$ $X = R[X] = \overline{R[X]}$

$X = R[X] \Leftrightarrow X$ pari

$R[X] = \overline{R[X]} \Leftrightarrow R[X]$ reale $\Leftrightarrow X$ reale

2.7 x reale dispari $\Rightarrow$ $X = \overline{R[X]}$ e $X = -R[X]$

$X = -R[X] \Leftrightarrow X$ dispari

$\overline{R[X]} = -R[X] \Leftrightarrow \bar{X} = -X \Leftrightarrow X + \bar{X} = 0$

$\Leftrightarrow Re[X] + j\,Im[X] + Re[X] - j\,Im[X] = 0$

$\Leftrightarrow 2Re[X] = 0 \Leftrightarrow X$ immaginario

3 Traslazione $\mathcal{F}(x(t-t_0), t \to \omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

DIM: $\mathcal{F}(x(t-t_0), t \to \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau$

avendo usato $\tau = t - t_0 \Rightarrow t = \tau + t_0$ e $dt = d\tau$. Si ha:

$$\mathcal{F}(x(t-t_0), t \to \omega) = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

La traslazione nel tempo diventa modulazione in frequenza

4) Modulazione: $\mathcal{F}(x(t) e^{j\omega_0 t}, t \to \omega) = X(\omega - \omega_0)$

DIM. $\mathcal{F}(x(t) e^{j\omega_0 t}, t \to \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0)$

La modulazione nel tempo diventa traslazione in frequenza

Inoltre $\mathcal{F}(x(t) \cos \omega_0 t) = \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$

5) Cambio scala $\mathcal{F}(x(at), t \to \omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

DIM: In $\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$ effettuo il cambio di variabile $\tau = at$
$\Rightarrow t = \frac{\tau}{a}$ e $dt = \frac{d\tau}{a}$

Se $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Se $a < 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} \left(-\frac{d\tau}{-a}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{d\tau}{-a}$

Ma $-a = |a|$ e quindi l'integrale dà $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ anche in questo caso

Moltiplicare l'argomento per a nel tempo comporta dividere l'argomento (e la TF) in frequenza

6 Convoluzione nel Tempo : $\mathcal{F}(v * w) = V \cdot W$

: Se $v * w$ converge (in senso tradizionale o generalizzato)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v*w(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) w(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, d\tau\, dt$$

$$\overset{(a)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt\right] v(\tau)\, d\tau =$$

$$\overset{(b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)\, e^{-j\omega\tau}\, v(\tau)\, d\tau = W(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= W(\omega) \cdot V(\omega) \qquad \text{CVD}$$

(a) Fubini per lo scambio d'integrali

(b) Proprietà (3) : Traslazione nel Tempo → modulazione in frequenza

La convoluzione nel Tempo diventa prodotto in frequenza

7 Prodotto nel Tempo : $\mathcal{F}(v \cdot w) = \frac{1}{2\pi} V * W$

Nell'ipotesi che per w valga il Teorema d'inversione :

$$w(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W(\vartheta)\, e^{j\vartheta t}\, d\vartheta$$

Allora $$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, w(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W(\vartheta)\, e^{j\vartheta t}\, d\vartheta \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\overset{(b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} W(\vartheta) \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j(\omega-\vartheta)}\, d\omega\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W(\vartheta)\, V(\omega-\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi} W * V\, (\omega) \qquad \text{CVD}$$

8 Dualità

$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x)) = 2\pi R[X]$ cioè $\mathcal{F}(X(t), t \to \omega) = 2\pi x(-\omega)$

Infatti, se $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} d\omega$, calcoliamo la TF di $X(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{j(-\omega)t} dt \overset{(a)}{=} 2\pi\, x(-\omega)$$

(a) abbiamo riconosciuto la formula di sintesi con ruoli di t e ω scambiati

Quindi se conosciamo la TF di un segnale x, è facile calcolare la TF del segnale X: basta prendere $2\pi x(-\omega)$

9) Valore in zero

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \qquad x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega$$

Basta applicare le formule di analisi e sintesi per $t=0$ e $\omega=0$

parità ↔ hermitianità
modulazione ↔ traslazione
convoluzione ↔ prodotto
regolarità ↔ comportamento asintotico
periodicizzazione ↔ campionamento

Calcolare la TF dei seguenti segnali:

1) $x(t) = \mathrm{rect}(t/T)$

2) $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$

3) $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$

4) $x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

5) $x(t) = \Lambda(t)$

6) $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$

7) $x(t) = 1/t$

8) $x(t) = \mathrm{sign}(t)$

9) $x(t) = u(t)$

1) $\mathcal{F}(\mathrm{rect}(t))(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Rightarrow \mathcal{F}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right)(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) = \frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

2) Se $y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, $Y(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)$ e inoltre $x(t) = y(t-t_0)$

$\Rightarrow X(\omega) = e^{-j\omega t_0} Y(\omega) = e^{-j\omega t_0}\, T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)$

3) $\mathcal{F}(\mathrm{rect}(t))(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Rightarrow \mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right) = 2\pi\,\mathrm{rect}(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$

Applicando il cambiamento di scala, $\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(2\pi\cdot\frac{t}{2\pi}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Cioè $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(t))(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

4) Applico il cambiamento di scala al caso precedente

$\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\right) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

5) Ricordiano che $\Lambda(t) = \mathrm{rect} * \mathrm{rect}\ (t)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\Lambda(t))(\omega) = \mathcal{F}(\mathrm{rect} * \mathrm{rect}\,(t))(\omega) = (\mathcal{F}(\mathrm{rect}))^2(\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

6) Siccome $\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ allora

$\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+t^2}\right) = 2\pi\, e^{-|\omega|} \Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi\, e^{-|\omega|}$

7) $\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\cos \omega t}{t} - j \frac{\sin \omega t}{t}\right] dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{t} dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{t} dt = 0$ perchè l'integrando è dispari

per $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt$ poniamo $\tau = \omega t$ e $t = \frac{\tau}{\omega}$, $dt = \frac{d\tau}{\omega}$

$\omega > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau/\omega} d\tau/\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$

$\omega < 0$: $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\sin \tau}{\tau/\omega} d\tau/\omega = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$

Quindi $\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)(\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$

Sia ora $x(t) = \frac{\sin t}{t} = \operatorname{sinc}(t/\pi)$

Abbiamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(\omega)\Big|_{\omega=0}$

Ma, per il cambiamento di scala, $X(\omega) = \pi \operatorname{rect}\left(\frac{-\omega}{2\pi} \cdot \pi\right) = \pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$

$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)(\omega) = -j\pi \operatorname{sign}(\omega)$

8) $\mathcal{F}(\text{sign}(t)) = -\frac{1}{j\pi}\mathcal{F}(-j\pi\,\text{sign}(t)) = -\frac{1}{j\pi}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{2}{j\omega}$

9) $\mathcal{F}(u(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sign}(t)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{j\omega} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

TF di derivate e integrali

Se x e $x' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ allora si ha

$$\mathcal{F}(x'(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Integrando per parti si ha: $u = x$, $v = e^{j\omega t}$ $\int u'v = uv - \int v'u$

$$= \left[x(t)e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j\omega)e^{-j\omega t}\,dt = \left[x(t)e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Se $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, allora $x \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$ e quindi $\left[x(t)e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$

[Nota: in caso contrario, la formula della TF della derivata non è applicabile]

Quindi $\mathcal{F}(x')(\omega) = j\omega X(\omega)$

Se $x, x', \ldots, x^{(n)}$ sono tutte assolutamente integrabili,

$\mathcal{F}(x^{(n)})(\omega) = (j\omega)^n X(\omega)$ e $|\mathcal{F}(x^{(n)})| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow \omega^n\cdot|X(\omega)| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$

TF dell'integrale cumulativo:

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right)(\omega) = \mathcal{F}(u * x)(\omega) = U(\omega)\cdot X(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]X(\omega)$$

$$= \pi X(0)\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

Se x ha area nulla, $0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = X(0) \Rightarrow \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{j\omega}X(\omega)$

Derivata della TF e comportamento asintotico

Se $x(t)$, $t \cdot x(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\frac{d}{d\omega} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-jt) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}(-jt\, x(t))$$

Quindi $\mathcal{F}(t\, x(t)) = j X'(\omega)$

Allora, se $t x(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, X' è uniformemente continua e infinitesima

Inoltre iterando la trasformata di $t x(t)$ si ha che, se $t^k \cdot x(t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall k$ da 0 a n, allora

$$\mathcal{F}(t^n x(t)) = j^n \cdot X^{(n)}(\omega)$$

Quindi, se $t^n x(t)$ è assolutamente integrabile, X è di classe $C^{(n)}(\mathbb{R})$

Ma $t^n x(t)$ è ass. int. solo se x "va a zero rapidamente" quindi la rapidità di decrescita asintotica nel tempo diventa regolarità in frequenza

Corollario
Se $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ è a supporto finito, $X \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Infatti, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^n x(t)$ è ancora $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Per **dualità**, siccome $R[x] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(X)$, se $\omega^n X(\omega)$ è assolutamente integrabile (decresce rapidamente), x deve essere regolare (cioè appartenere a $C^{(n)}(\mathbb{R})$)

TF e serie di Fourier

Sia $s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e $s(t)=0 \quad \forall t \notin \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \Rightarrow s \in \mathcal{L}^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

Sia $x(t) = rep_T[s](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-kT)$ periodico di periodo T

Sia infine $\overset{\circ}{S}(\omega) = \mathcal{F}(s(t), t \to \omega)$

Mostriamo che i coeff. di Fourier del segnale x sono $a_k = \frac{1}{T}\overset{\circ}{S}(k\omega_0)$

Infatti: $a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

Ma, per $t \in (-T/2, T/2) \qquad x(t) = s(t)$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\overset{\circ}{S}(k\omega_0)$$

CVD

(a) perché $s(t)=0 \quad \forall t \notin \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

TF e sistemi

Consideriamo un sistema C.C. BIBO stabile con R.I. $h(t)$

Sappiamo che la sua R.F. è $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t), t \to \omega)$

Se all'ingresso del sistema abbiamo un segnale $x(t)$, l'uscita è

$$y = L(x) = h * x$$

Il calcolo della convoluzione nel tempo è concettualmente non intuitivo.

In frequenza però abbiamo una relazione molto più semplice:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

In questo modo lo studio e la progettazione di sistemi LTI può diventare <u>molto semplice</u>

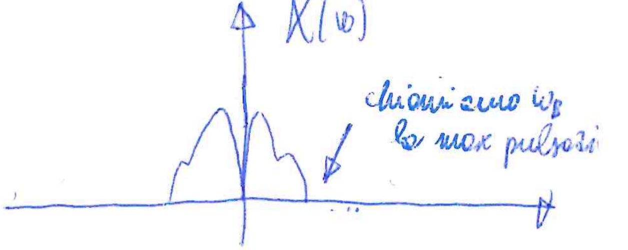
<u>Esempio</u> Modulazione e demodulazione dei segnali (AM)

La propagazione elettromagnetica dei segnali nell'aria avviene più facilmente a determinate frequenze

I segnali audio hanno contenuto d'interesse alle frequenze comprese tra 20 Hz e 20 kHz (perché è l'intervallo di sensibilità del nostro sistema uditivo.

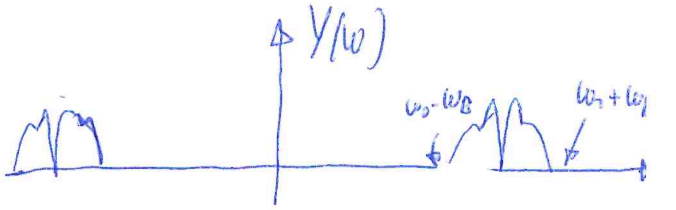
Quindi tipicamente $X(\omega) = 0 \;.\; \forall |\omega| > \omega_B$ con $\omega_B = (20\,kHz \cdot 2\pi)$ e $X(0) = 0$

Però a tali frequenze la trasmissione radio può essere difficile. Allora si preferisce trasmettere un segnale a frequenze più elevate.

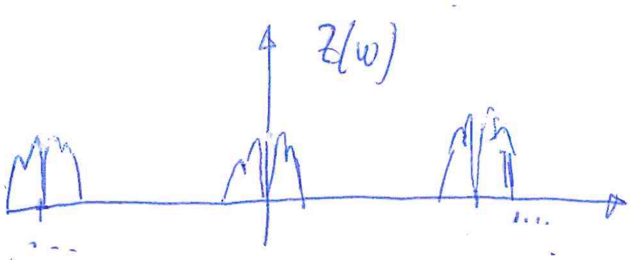


Una soluzione (semplificata) è di trasmettere

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$



$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2}\Big(X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\Big)$$



Come riottenere $x(t)$ da $y(t)$?
(ammesso di poter ricevere y senza altre distorsioni)

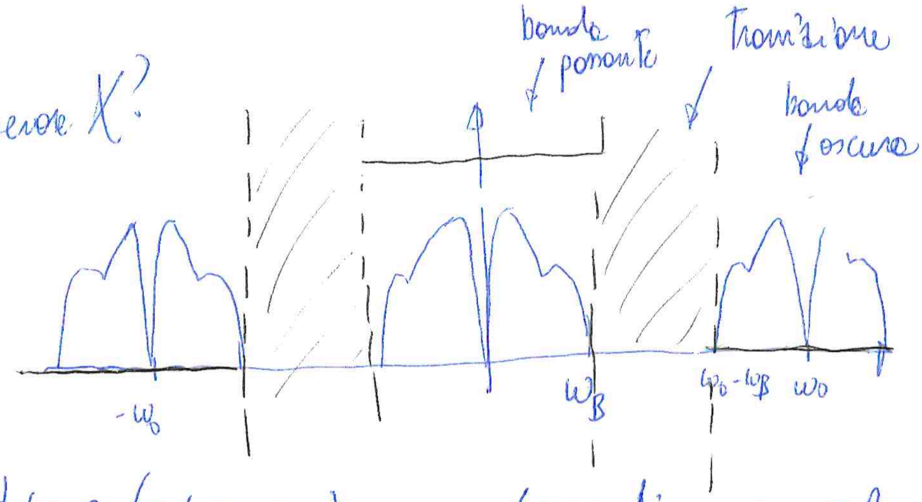
Un primo passo è quello di calcolare $z(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

Applicando ancora la formula della modulazione

$$Z(\omega) = \frac{1}{2}\left[Y(\omega - \omega_0) + Y(\omega + \omega_0) \right] = \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{4} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_0)$$

$$= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{4} X(\omega + 4\omega_0)$$

Che posso fare per recuperare X?



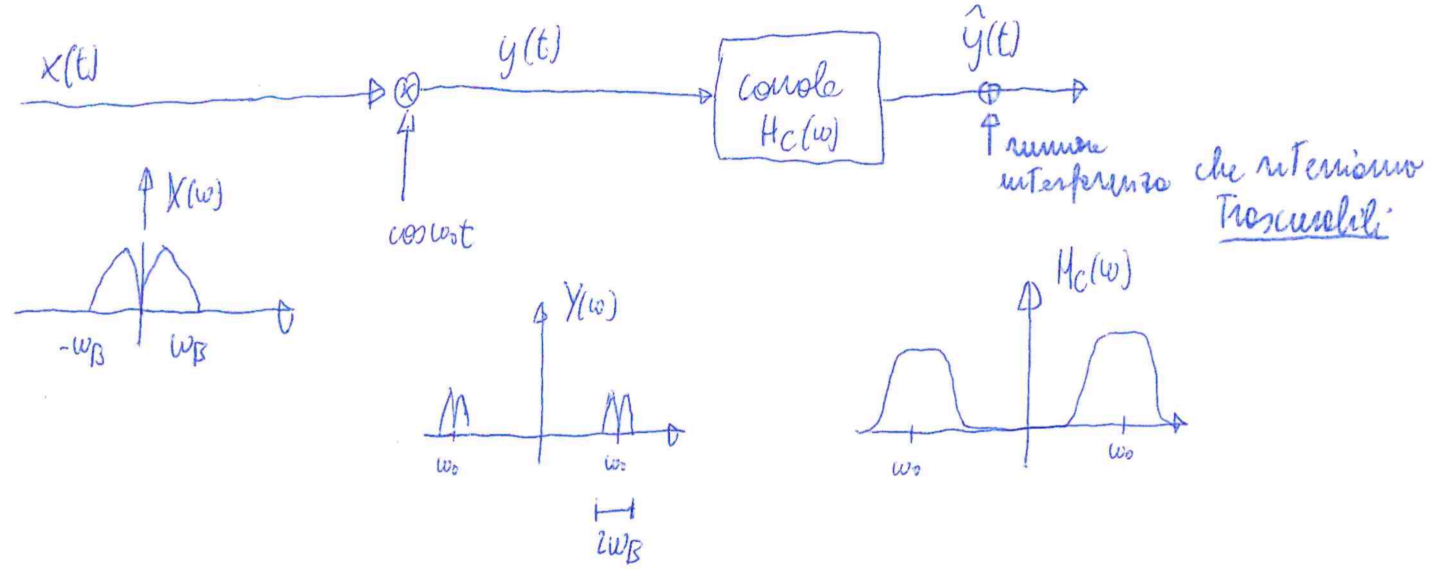
Posso usare un LTI H_{LP} con RF tale che:

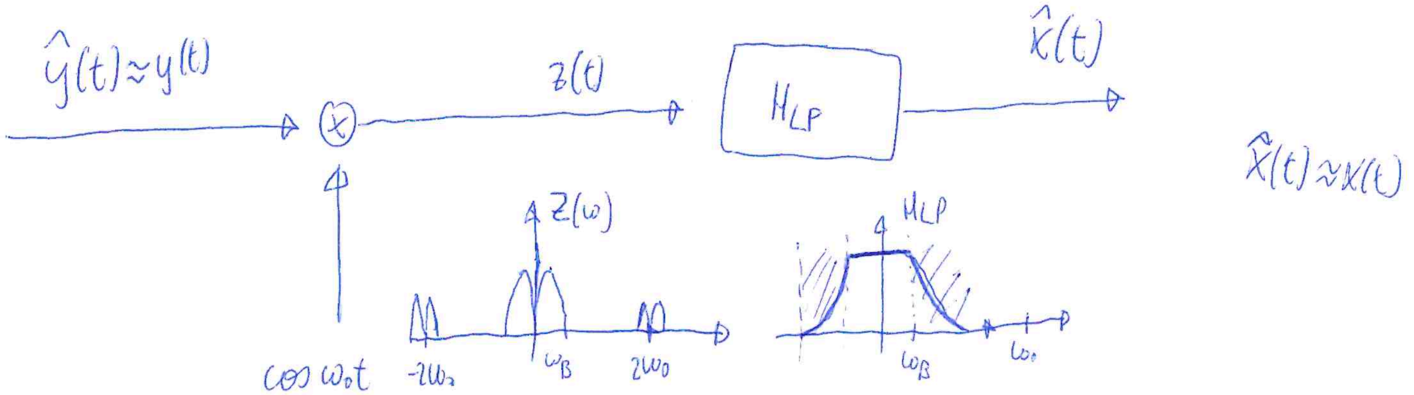
$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 1 & \forall \omega \in (-\omega_B, \omega_B) \\ 0 & \forall |\omega| > \omega_0 - \omega_B \\ \text{non definito} & \forall \omega \in (\omega_B, \omega_0 - \omega_B) \end{cases}$$

(ricordiamo ω_B è la max pulsazione di x)

Questo è un caso ideale. Nella pratica devo avere un LTI tale che $H(\omega)$ sia il più possibile costante in banda passante ed il più possibile piccola in banda oscura. ($\omega^n \cdot H(\omega)$ deve $\xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0$)
In transizione "non ha importanza": posso imporre un andamento "regolare" (derivabile con derivate continue)

Schema semplificato di Trasmissione radio analogica





<u>Modulazione</u> Sposto lo spettro di x per 2 motivi

1) per portare lo spettro laddove il canale "lascia passare" il segnale. Infatti il canale radio è passabanda

2) Permette di mandare più segnali contemporaneamente usando portanti e pulsazioni sufficientemente diverse

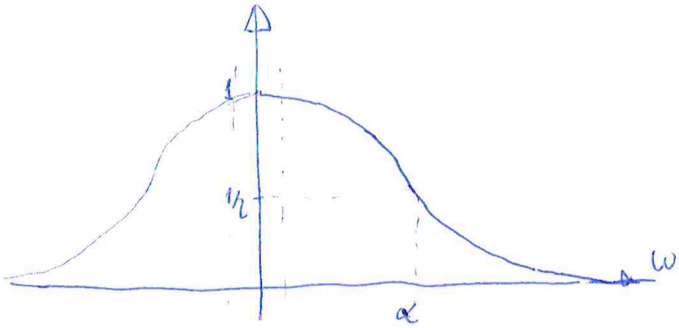
<u>Ricevitore</u> In prima approssimazione il ricevitore è fatto con un oscillatore, un moltiplicatore ed un filtro LP. Si può usare anche un RC, purché $\omega_B \ll \frac{1}{RC} \ll \omega_0$

Infatti ricordiamo che per un circuito RC,

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2} \qquad \text{dove } \alpha = \frac{1}{RC}$$

$$|H(0)|^2 = 1$$

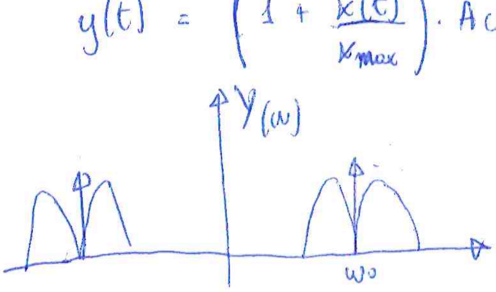
$$|H(\alpha)|^2 = \frac{1}{2}$$



Lo schema proposto non è realistico perché tra le altre cose, ignora la presenza di rumore e la difficoltà nel generare, al ricevitore, un segnale $\cos\omega_0 t$ perfettamente in fase con quello del trasmettitore

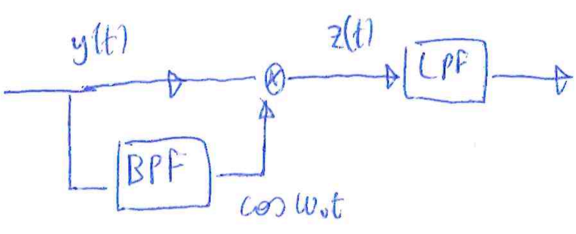
Uno schema più realistico è:

$$y(t) = \left(1 + \frac{x(t)}{x_{max}}\right)\cdot A\cos\omega_0 t = A\cos\omega_0 t + \frac{A}{x_{max}}\, x(t)\cos\omega_0 t$$



$$Y(\omega) = A\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{A}{x_{max}}X(\omega-\omega_0) + A\pi\,\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{A}{x_{max}}X(\omega+\omega_0)$$

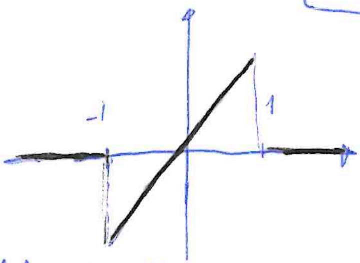
Allora filtrando $y(t)$ con un filtro passa-banda (BPF) centrato su ω_0 si riesce a recuperare la portante (cioè il segnale $\cos\omega_0 t$) che a sua volta viene usata per demodulare y:



Il BPF può essere sostituito con un sistema non lineare: amplificatore limitato ad alto guadagno che rimuove la modulazione e lascia solo la portante

Altri esercizi su TF

1) Calcolare la TF di $x(t) = t \cdot rect(t/2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$



Osserviamo che $x(t) = t \cdot y(t)$, dove $y(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Allora $X(\omega) = j \frac{d}{d\omega} Y(\omega)$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left(rect\left(\tfrac{t}{2}\right), t \to \omega\right) = 2\, sinc\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = 2\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$Y'(\omega) = 2\,\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2} \Rightarrow X(\omega) = 2j\,\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}$$

2) Calcolare la TF di $x(t) = sinc^2(t/T)$ Posto $y(t) = \Lambda(t)$,

Sappiamo che $\mathcal{F}(\Lambda(t)) = sinc^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = Y(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}(Y(t)) = 2\pi\,\Lambda(\omega) = 2\pi\, y(-\omega)$

$$\text{Allora } \mathcal{F}\left(sinc^2\left(\frac{t}{T}\right)\right) = \mathcal{F}\left(sinc^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{t}{2\pi}\right)\right) = \mathcal{F}\left(Y\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$$

$$= \frac{T}{2\pi}\,\mathcal{F}(Y(t))\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right) = \frac{T}{2\pi}\cdot 2\pi\,\Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right) = T\,\Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right)$$

3) Calcolare la TF di $x(t) = u(t-2)e^{-3t} + u(t) - u(t+1)$

Conviene riscrivere x come segue: $x(t) = V(t) + W(t)$

$$V(t) = u(t-2)\,e^{-3t} = u(t-2)\,e^{-3(t-2+2)} = e^{-6}\cdot u(t-2)\,e^{-3(t-2)} = e^{-6}\cdot y(t-2)$$

con $y(t) = u(t)e^{-3t}$ la cui T.F. è $Y(\omega) = \frac{1}{3+j\omega} \Rightarrow V(\omega) = \frac{e^{-6}\cdot e^{-j2\omega}}{3+j\omega}$

$$W(t) = u(t) - u(t+1) = \begin{cases} 0-0 & \text{se } t<-1 \\ 0-1 & \text{se } -1<t<0 \\ 1-1=0 & \text{se } t>0 \end{cases} = -rect\left(t+\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow W(\omega) = -e^{j\frac{\omega}{2}}\,sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{e^{-2(3+j\omega)}}{3+j\omega} - e^{j\frac{\omega}{2}}\cdot sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$