Trasformata di Fourier a Tempo discreto (TFtd)

La TFtd permette di rappresentare segnali a tempo discreto e aperiodici tramite esponenziali immaginari puri, similmente alla TF.

Definizione Sia $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, si consideri, per un certo $\omega \in \mathbb{R}$, la seguente serie: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

Se la serie converge (in senso proprio o generalizzato) definiamo il segnale $X : \omega \in \mathbb{R} \to \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ (1)

$X(\omega)$ è detto essere la TFtd di x. La (1) è la formula di analisi

Condizione sufficiente di esistenza

Se $x \in \ell^1$, la sua TFtd esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, inoltre è limitata e continua

Periodicità Dato x, se $X(\omega)$ esiste, essa è una funzione periodica di periodo 2π

Infatti è la somma di funzioni periodiche

Inversione (formula di sintesi)

Sia $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $x \in l^1$, quindi $X(\omega)$ è continua e limitata $\Rightarrow$ è $L^2(-\pi,\pi)$
e anche $L^1(-\pi,\pi)$

Il segnale $X(\omega)$ è periodico con periodo 2π e quindi altrettanto vale per il segnale $Y(\omega) = X(-\omega)$

Scriviamo allora la serie di Fourier per Y (possiamo applicare Dirichlet)

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 \omega} \qquad \text{ma} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega}$$

Ma abbiamo anche che $Y(\omega) = X(-\omega)$. Applicando la formula di analisi della TFtd abbiamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega} = Y(\omega) = X(-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j\omega n}$$

Ne segue che il segnale $x(n)$ coincide con i coeff. della serie di Fourier di Y. Abbiamo allora

$$x(n) = a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{-j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(-\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

posto $\vartheta = -\omega$, si ha $d\omega = -d\vartheta$ e $\int_{-\pi}^{\pi} X(-\omega) e^{-j\omega n} d\omega = \int_{\pi}^{-\pi} X(\vartheta) e^{j\vartheta n}(-d\vartheta)$

in conclusione, chiamando ϑ di nuovo ω, si ha:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \qquad (2) \qquad \text{Formula di Sintesi}$$

Infine, si può provare che la formula di sintesi vale anche se $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, purché $X(\omega)$ esista

TFtd e risposta in frequenza

Confrontando le definizioni di TFtd e di risposta in frequenza di un sistema BIBO-stabile, si conclude che $\hat{h}(\omega)$ è la TFtd di $h(n)$, risp. impulsiva del sistema

Proprietà della TFtd

Useremo $\mathcal{F}(x)(\omega) = X(\omega)$ per indicare la TFtd del segnale x

1) Linearità

Se $X = \mathcal{F}(x)$ e $Y = \mathcal{F}(y)$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha X + \beta Y$

2) Simmetrie

2.1 $\mathcal{F}(\bar{x}) = \overline{R(X)}$

2.2 $\mathcal{F}(R(x)) = R(X)$

2.3 x pari $\Rightarrow$ X pari

2.4 x dispari $\Rightarrow$ X dispari

2.5 x reale $\Rightarrow$ X hermitiana

2.6 x reale pari $\Rightarrow$ X reale pari

2.7 x reale dispari $\Rightarrow$ X immaginaria dispari

Le dim. sono immediate e seguono lo stesso principio del caso TFtc

3) Traslazione $\mathcal{F}(U_m[x])(\omega) = e^{-j\omega m} X(\omega)$

DIM. $\mathcal{F}(U_m[x])(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m)\, e^{-j\omega n}$ posto $k = n-m$ e $n = k+m$,

$$\mathcal{F}(U_m[x])(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j\omega(k+m)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \cdot e^{-j\omega m} = X(\omega) e^{-j\omega m}$$

4) Modulazione $\mathcal{F}(e^{j\omega_0 n} x(n))(\omega) = X(\omega-\omega_0)$

DIM. $$\mathcal{F}(e^{j\omega_0 n} x(n))(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(\omega-\omega_0)$$

5) Prodotto di convoluzione

Se $v, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $z = v * w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $Z(\omega) = V(\omega) \cdot W(\omega)$

cioè $\mathcal{F}(v * w) = \mathcal{F}(v)\, \mathcal{F}(w)$

Infatti $$Z(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m)\, w(n-m)\, e^{-j\omega(n-m+m)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n-m) e^{-j\omega(n-m)} \right) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m)\, W(\omega)\, e^{-j\omega m}$$

$$= V(\omega)\, W(\omega)$$

Infatti $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n-m)\, e^{-j\omega(n-m)} = W(\omega)$ indipendentemente da m

6) Moltiplicazione.

Se $X = \mathcal{F}(x)$ e $Y = \mathcal{F}(y)$ e se $\mathcal{F}(xy)$ esiste,

$\mathcal{F}(x \cdot y) = X *_{2\pi} Y$ dove $*_{2\pi}$ indica la convoluzione periodica di periodo 2π. SENZA DIM.

7) Derivata in ω $\qquad \mathcal{F}(n\,x(n)) = j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$

$$\frac{d}{d\omega} X(\omega) = \frac{d}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-jn)\, x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow j \frac{d}{d\omega} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, x(n)\, e^{-j\omega n} = \mathcal{F}(n\, x(n)) \qquad \text{CVD.}$$

8) Parseval $\quad$ Se $x \in \ell^2$, anche $X \in L^2(-\pi, \pi)$ e $\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|X\|_2^2$

Posto $Y(\omega) = X(-\omega)$ e a_k coeff. di Fourier di Y,

sappiamo che $a_k = x(k)$. Applicando Parseval a Y si ha:

$$\|X\|_2^2 = \|Y\|_2^2 = 2\pi\, \|a_k\|_2^2 = 2\pi\, \|x\|_2^2 \qquad \text{CVD}$$

Esempi di calcolo della TFCd

1) Se $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } |n| \le N \\ 0 & \text{se } |n| > 0 \end{cases}$ $\quad$ osserviamo che $x(n) = (2N+1)\, h(n)$

dove $h(n)$ è la R.I. del sistema che calcola la media mobile su $2N+1$ campioni.

Avevamo calcolato $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} \Rightarrow X(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$

2) $x(n) = a^n u(n)$ con $|a| < 1$

$$X(\omega) = \sum_{n \ge 0} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{j\omega}}$$

È la RF di un sistema con $h(n) = a^n u(n)$, come avevamo già calcolato

Legame tra TFD e TFtd

La TFtd è importante perché permette di rappresentare i sistemi LTI come un prodotto: se $y = L[x] = h * x$ allora $Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$ dove L è un LTI di RI h e di RF H, mentre x e y sono ingresso e uscita del sistema mentre X e Y sono le rispettive TFtd

La TFtd però ha due problemi nell'applicazione pratica: 1) è una somma infinita

2) è una funzione di variabile continua

Possiamo però approssimarla con precisione arbitraria almeno nel caso di segnali a supporto finito, che poi è proprio il caso più rilevante (anzi, il solo caso rilevante) nella pratica

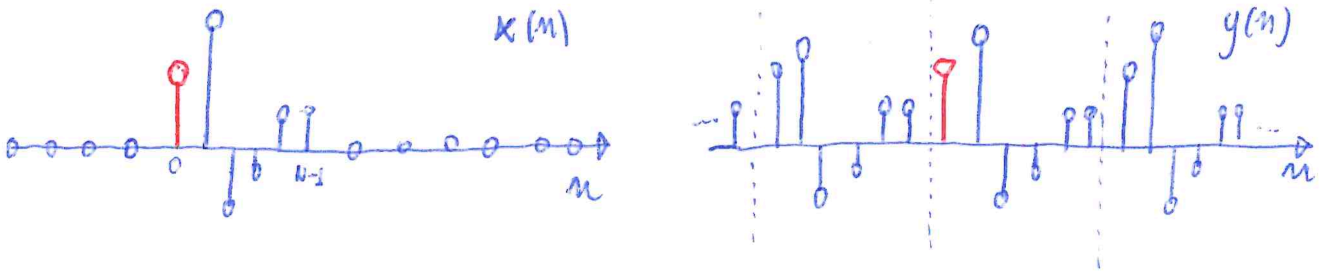
Sia allora $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un segnale a supporto finito. Visto l'arbitrarietà della variabile temporale, possiamo considerare unicamente il caso in cui il supporto è $\{0, 1, \dots N-1\}$

In altre parole, $x(n) = 0 \quad \forall n \notin \{0, 1, \dots N-1\}$

Sia ora $y(n) = rep_N[x](n) = x(n \mod N)$

y è la replica periodica di x, con periodo N

Vediamo un esempio grafico. Il valore di indice $n=0$ è in rosso



Calcoliamo la TFD del segnale periodico y:

$$Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \text{ per } k \in \{0, 1, \dots N-1\}$$

Ma, $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, $y(n) = x(n)$. Posto inoltre $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ si ha

$$Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j(k\Delta\omega)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j(k\Delta\omega)n} = \frac{1}{N} X(k\Delta\omega)$$

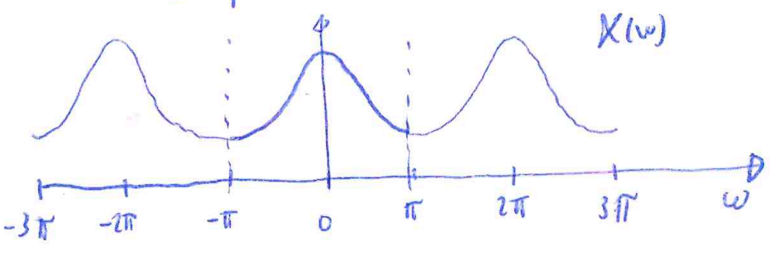
dove abbiamo sfruttato il fatto che $x(n) = 0 \ \forall n < 0$ e $\forall n \geq N$

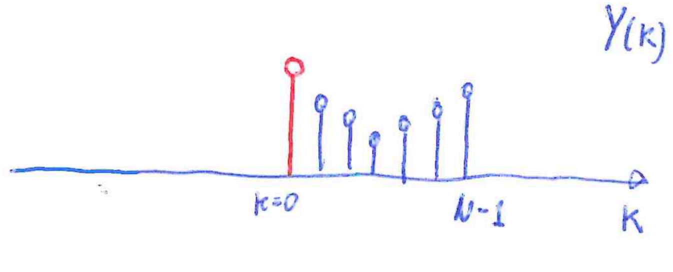
Quindi i valori di $Y(k)$ corrispondono ai campioni della TFCd X del segnale x, presi a passo $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

Cioè sono i campioni presi nei punti: $\{0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \dots (N-1)\Delta\omega\} =$

$= \{0, \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, 3\cdot\frac{2\pi}{N}, \dots (N-1)\frac{2\pi}{N}\}$

Graficamente, ricordando che X è periodica di periodo 2π





Osserviamo dunque che il "primo" valore di Y è

$Y(0) = \frac{1}{N} X(0)$ mentre l'ultimo è:

$$Y(N-1) = \frac{1}{N} X((N-1)\Delta\omega) = \frac{1}{N} X\left((N-1)\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{N} X\left(2\pi - \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{N} X\left(-\frac{2\pi}{N}\right)$$

per periodicità di X $= \frac{1}{N} X(-\Delta\omega)$

Similmente, $Y(N-2) = \frac{1}{N} X((N-2)\Delta\omega) = \frac{1}{N} X(-2\Delta\omega) \dots$

Per visualizzare l'andamento di X, spesso si preferisce mettere $X(0)$ al centro del vettore di valori. In molti linguaggi/ambienti ciò si fa con il comando fft shift:

Visualmente,

N pari

$$\underline{Y} = [\overbrace{Y(0) \quad Y(1) \quad \dots \quad Y(\tfrac{N}{2}-1)}^{N/2 \text{ valori}} \quad \overbrace{Y(\tfrac{N}{2}) \quad \dots \quad Y(N-1)}^{N/2 \text{ valori}}]$$

$$\text{fft shift}(\underline{Y}) = [Y(\tfrac{N}{2}) \quad \dots \quad Y(N-1) \quad Y(0) \quad \dots \quad Y(\tfrac{N}{2}-1)]$$

$$\boxed{N \cdot Y(\tfrac{N}{2}) = X(\tfrac{N}{2} \cdot \tfrac{2\pi}{N}) = X(\pi) = X(-\pi)}$$

$$= \frac{1}{N}[X(-\pi) \quad \dots \quad X(-\Delta\omega) \quad X(0) \quad \dots \quad X(\pi - \Delta\omega)]$$

Pulsazioni comprese da $-\pi$ e $(\pi - \Delta\omega)$ con passo $\Delta\omega$

N dispari

$$\underline{Y} = [Y(0) \mid Y(1) \dots Y(\tfrac{N-1}{2}) \mid Y(\tfrac{N+1}{2}) \dots Y(N-1)]$$

$$\text{fft shift}(\underline{Y}) = [Y(\tfrac{N+1}{2}) \dots Y(N-1) \mid Y(0) \mid Y(1) \dots Y(\tfrac{N-1}{2})]$$

$$= \frac{1}{N}[X(-\pi + \tfrac{\Delta\omega}{2}) \dots X(-\Delta\omega) \mid X(0) \mid X(\Delta\omega) \dots X(\pi - \tfrac{\Delta\omega}{2})]$$

$N \cdot Y(\frac{N+1}{2}) = X(\frac{N+1}{2}\Delta\omega) =$
$X((\frac{N}{2}+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}) = X(\pi + \frac{\pi}{N})$
$= X(-\pi + \frac{\pi}{N}) = X(-\pi + \frac{\Delta\omega}{2})$

Pulsazioni comprese da $-\pi + \frac{\Delta\omega}{2}$ e $\pi - \frac{\Delta\omega}{2}$ e passo $\Delta\omega$

Possiamo ottenere un campionamento più fitto di $X(\omega)$?

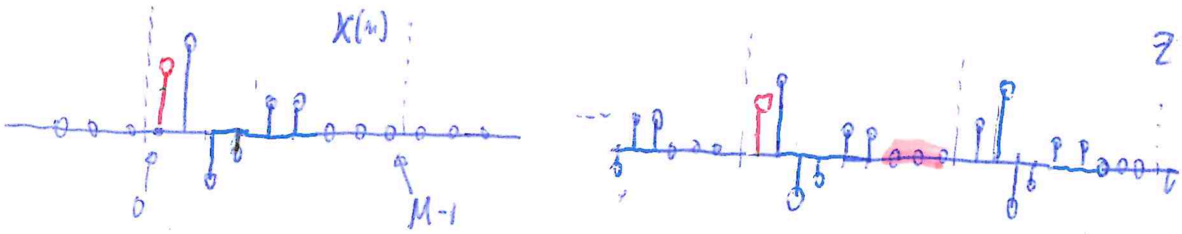
Il passo $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ è "sufficiente" per determinare x (basta applicare la formula di sintesi della TFD al vettore $\underline{Y}$) ma può non bastare per applicazioni in cui si vuole maggiore risoluzione nella rappresentazione di $X(\omega)$ (vedere Lab 3 per un esempio)

Allora introduciamo $z(n) = x(n \bmod M)$ dove

$\boxed{M > N}$

z è la replica periodica di x di periodo M

Ma i valori di x tra N-1 e M-1 sono nulli



Vengono quindi "aggiunti" degli zeri nel periodo di z (zero-padding)

Calcoliamo la TFD di z:

$$Z(k) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} z(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} \qquad \text{ma } z(n) = \begin{cases} x(n) & \text{se } n \in \{0,\dots,N-1\} \\ 0 & \text{se } n \in \{N,\dots,M-1\} \end{cases}$$

$$Z(k) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n} = \frac{1}{M} X\left(k \cdot \frac{2\pi}{M}\right) = \frac{1}{M} X(k\Delta\omega_1)$$

Quindi adesso $X(\omega)$ è campionato con passo $\Delta\omega_1 = \frac{2\pi}{M} < \frac{2\pi}{N} = \Delta\omega$

Il nuovo passo può essere reso arbitrariamente piccolo

Quindi aumentando M si può raffinare arbitrariamente la risoluzione in frequenza di X

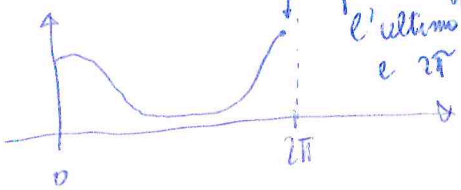
In pratica vedremo nel laboratorio che, usando il comando fft, si realizzano contemporaneamente:

- lo zero padding
- il calcolo della TFD
- la moltiplicazione per M

Se si usa il comando XFFT = fft(x, M) avremo che il vettore XFFT contiene i valori $X\left(k \frac{2\pi}{M}\right)$ per k da 0 a M-1

Per visualizzare l'andamento di $|X|$ si dovrà allora eseguire:

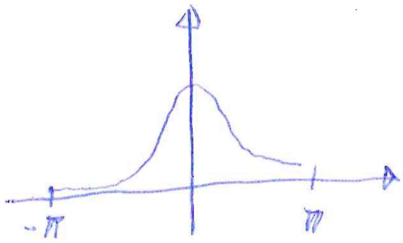
omega = (0:M-1) * $\frac{2\pi}{M}$;
plot(omega, abs(XFFT))



Per centrare la curva si può scrivere

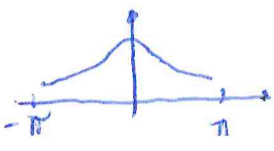
Se M pari

Δω₁ = 2π/M;
omega = -π : Δω₁ : (π - Δω₁);
plot(omega, fftshift(abs(XFFT)));



Se M dispari

Δω₁ = 2π/M;
omega = $\left(-\pi + \frac{\Delta\omega_1}{2}\right)$: Δω₁ : $\left(\pi - \frac{\Delta\omega_1}{2}\right)$;
plot (omega, fftshift (abs (XFFT)));



N.B. quasi sempre si sceglie una potenza di 2 come valore di M

TFtd di segnali periodici

I segnali periodici non sono $\ell^1(\mathbb{Z})$ ma ammettono TFtd in senso generalizzato (come nel caso t.c.)

Partiamo con il ricordare la serie di Fourier del treno d'impulsi di periodo $T = 2\pi$, nella variabile ω. Siccome $\frac{2\pi}{T} = 1$ si ha

$$p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \cdot 2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{jk\omega}$$

Ma allora possiamo calcolare la TFtd del segnale $x(n) = 1$:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega k}$$ ponendo $k = -n$. Si ha

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k2\pi)$$

Quindi la TFtd di $x(n) = 1$ è $X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k2\pi)$

Se consideriamo un periodo, $\forall \omega \in (-\pi, \pi)$ $X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$

Sia ora $y(n) = x(n)\, e^{j\omega_0 n}$ con $\omega_0 \in (-\pi, \pi)$

In altre parole, $y(n) = e^{j\omega_0 n}$.

Abbiamo, $\forall \omega \in (-\pi, \pi)$, $Y(\omega) = X(\omega - \omega_0) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$

Analogamente, $\begin{cases} \forall\, \omega_0 \in (0, \pi) \\ \forall\, \omega \in (-\pi, \pi) \end{cases}$, $\mathcal{F}(\cos(\omega_0 n), n \to \omega) = \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$

Infine, per un generico segnale periodico $x(n)$ si ha:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad X(k) \text{ è la TFD}$$

$$TFtd(x)(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi X(k)\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad \text{per } \omega \in (0; 2\pi)$$

Considerando la periodicità di $X(k)$ e della TFtd. non è difficile mostrare che

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad TFtd(x)(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi X(k)\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$