$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

$$S_1 = a_0 + a_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 0 + (-1)^2 = 1$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$$

S_n non può avere limite

e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è IRREGOLARE.

Se ho una serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $a_n \geq 0$

so che sicuramente NON PUÒ ESSERE IRREGOLARE

(perché s_n è succ. crescente che o converge

a L o diverge a $+\infty$).

→ Criteri per la convergenza delle serie a termini positivi

1) RAPPORTO $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \begin{cases} L>1 & \text{DIVERGE} \\ L<1 & \text{CONVERGE} \\ L=1 & \text{NON SO} \end{cases}$

2) RADICE N-ESIMA $\quad \lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = L \quad \begin{cases} L>1 & \text{DIVERGE} \\ L<1 & \text{CONVERGE} \\ L=1 & \text{NON SO} \end{cases}$

3) CONFRONTO ASINTOTICO

tipica applicazione: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \underbrace{(\ldots)}_{L\neq 0,\ L\neq+\infty}$

$\alpha>1$ CONVERGE

$\alpha\leq 1$ DIVERGE

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non ha tutti i termini positivi?

① Studio la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

questa è una serie a termini positivi e ci applico i criteri

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

$$-\sum_{n=0}^{N} |a_n| \le \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n}}_{S_N} \le \sum_{n=0}^{N} |a_n| \qquad N \to +\infty$$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Se so che $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

$$\Downarrow$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE

SE CONVERGE LA SERIE DEI VALORI ASSOLUTI, CONVERGE ANCHE LA SERIE DI PARTENZA

Def Si dice che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **CONVERGE ASSOLUTAMENTE** se converge la serie dei suoi valori assoluti.

cioè se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è a termini positivi $(a_n \geq 0)$

CONVERGENZA = CONVERGENZA ASSOLUTA

(perché $|a_n| = a_n$)

$\boxed{\text{CONVERGENZA DI UNA SERIE a volte è CHIAMATA CONVERGENZA SEMPLICE}}$

Teorema Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non è a termini positivi allora

1) La convergenza assoluta (convergenza della serie dei valori assoluti) IMPLICA la convergenza (semplice) della serie

2) se la serie dei valori assoluti DIVERGE (a $+\infty$) NON È DETTO che la serie di partenza DIVERGA o sia IRREGOLARE, ma potrebbe anche CONVERGERE.

Es $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \underbrace{-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots}$

$a_1 = -1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = -\frac{1}{3}$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

serie armonica
DIVERGE

la serie dei valori assoluti diverge.
NON SO CONCLUDERE NULLA sulla CONVERGENZA

CRITERIO DI LEIBNIZ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n}_{} \cdot a_n \qquad \underbrace{a_n \geq 0}_{}$$

$$+a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

se succede che

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_n \underbrace{(-1)^n a_n}_{} = 0 \\ a_n \text{ è DECRESCENTE} \quad a_{n+1} \leq a_n \end{cases}$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è CONVERGENTE

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge $\quad a_n = \frac{1}{n}$ è DECRESCENTE

e $\lim_n \frac{1}{n} = 0$

Es

$\forall \alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{CONVERGE}$$

MENTRE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

CONVERGE solo se $\alpha > 1$

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ $\quad \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ decresc

Es Studiare la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

$$a_n = \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n}}$$

① Studio la convergenza ASSOLUTA, cioè la convergenza della serie dei valori assoluti

$$a_n = \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} \qquad |a_n| = \frac{|(x-1)^n|}{|2^n \sqrt{n}|} = \frac{|x-1|^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$$

n è pari $\quad (x-1)^4 = |x-1|^4 > 0$

n è dispari $\quad |(x-1)^3|$

se $(x-1) > 0 \quad |x-1|^3$

se $(x-1) < 0 \quad |(-1)^3 |x-1|^3|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-1|^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$$

o applico criterio radice n-esima o criterio del rapporto (EQUIVALENTE)

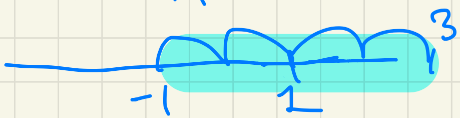
$$\sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}} = \frac{\left(|x-1|^n\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{|x-1|}{2\, e^{\frac{1}{2n}\lg n}} \to \frac{|x-1|}{2}$$

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n}\lg n} \to e^0 = 1$$

$$L = \frac{|x-1|}{2}$$

① Se $L < 1$ $\quad \cancel{2} \cdot \underbrace{\frac{|x-1|}{\cancel{2}} < 1 \cdot 2}$ la serie dei valori assoluti converge

$$|x-1| < 2$$



$$\begin{cases} x-1 < 2 \\ x-1 > -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\boxed{-1 < x < 3}$$

Se $-1 < x < 3$ la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE e quindi CONVERGE anche la serie di PARTENZA (senza valori assoluti).

③ se $L > 1$ $\qquad \frac{|x-1|}{2} > 1 \qquad |x-1| > 2$

$\boxed{\text{la serie dei valori assoluti DIVERGE}}$

$|x-1| > 2 \qquad x-1 > 2 \qquad x > 3$

oppure $\quad x-1 < -2 \qquad x < -1$

$\boxed{\text{se } x>3 \text{ oppure } x<-1 \text{ la serie dei valori assoluti diverge}}$

$$a_n = \frac{(x-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad |a_n| = \frac{|x-1|^n}{2^n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\left(\frac{|x-1|}{2}\right)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\left(\frac{|x-1|}{2} > 1\right. \qquad \left(\frac{|x-1|}{2}\right)^n \to +\infty$$

$$|a_n| = \frac{\left(\frac{|x-1|}{2}\right)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{|x-1|}{2} > 1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{|x-1|}{2}\right)^n \longrightarrow +\infty$$

$$\downarrow$$

$$|a_n| \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

$|a_n|$ È RAPPORTO TRA INFINITO ESPONENZ. $\left(\frac{|x-1|}{2}\right)^n$

E INFINITO POLINOMIALE $(n^{1/2})$

$$|a_n| \to +\infty \implies a_n \not\to 0$$

$\downarrow$

NON È SODDISFATTA LA COND. NECESSARIA DI CONVERGENZA se $L>1$ la serie dei valori assoluti

$L = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ DIVERGE

e la serie di potenze (senza valori assoluti) NON PUÒ CONVERGERE (perché $\lim_n a_n$ NON È ZERO)

$$L = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$L>1 \Rightarrow \lim_n |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_n a_n \neq 0$$

$-1 < x < 3$ la serie converge (assolut e sempl.)

$x > 3$, $x < -1$ la serie dei valori assoluti diverge e la serie di potenza NON CONVERGE perché $\lim_n a_n \neq 0$

$x \overset{?}{=} -1$ $\qquad$ $x \overset{?}{=} 3$

$x=3$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-1)^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot \sqrt{n}}$

se $x=3$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

DIVERGE

$x=-1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \sqrt{n}}$

$(-2)^n = \left((-1) \cdot 2\right)^n = (-1)^n \cdot 2^n$

Se $x=-1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ DIVERGE

mentre la serie senza valori assoluti

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CONVERGE per criterio di LEIBNIZ

$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ DECRESC.

Es

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(n - \operatorname{arctg} n\right)} \left| \frac{1}{n^{\alpha}} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

al variare di $\alpha > 0$

$$\left(\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n} - \underbrace{\operatorname{arctg} n}_{\substack{\downarrow \\ \frac{\pi}{2}}}\right) = n \left[1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}} \right] = n\left(1 + o(1)\right)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$\alpha = 1$

$$\frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right)$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)^3$$

TRA TERMINI CHE VANNO A ZERO $\left(\frac{1}{n}\right)$ RACCOLGO QUELLO DI GRADO MINORE

$\underline{\alpha > 1}$ tra $\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ e $\left(\frac{1}{n}\right)^{1}$ raccolgo $\left(\frac{1}{n}\right)^{1}$

$$\frac{1}{n}\left[\underbrace{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - 1 + \underbrace{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[-1 + o(1)\right] \qquad \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\underline{\alpha < 1}$

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\left[1 \underbrace{- \frac{1}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^{3-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha}}\left[1 + o(1)\right].$$

$$a_n = (n - \arctan n) \left| \frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n} \right|$$

$\alpha = 1$

$$a_n = n \cdot (1 + o(1)) \cdot \frac{1}{n^3} \left| \frac{1}{6} + o(1) \right|$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot (1 + o(1)) \left| \frac{1}{6} + o(1) \right| \sim \frac{1}{n^2}$$

$L \neq 0$ $L = \frac{1}{6}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ CONVERGE perché

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

(CONFRONTO ASINTOTICO)

$\alpha > 1$

$$a_n = \cancel{n}\left(1+o(1)\right) \frac{1}{\cancel{n}} \left|-1+o(1)\right|$$

$a_n \longrightarrow 1 \implies$ la serie non soddisfa la condizione necessaria

$\big\downarrow \quad (a_n \not\to 0)$

NON CONVERGE

$\alpha < 1$

$$a_n = n\,(1+o(1))\,\frac{1}{n^\alpha} \qquad |1+o(1)|$$

$\lim_n a_n = +\infty \Rightarrow$ la serie NON CONVERGE

perché non è soddisfatta

la condizione

NECESSARIA di

convergenza.