# SERIE NUMERICHE

$a_n$ successione di numeri reali

serie di termine $a_n$ = somma (infinita) di tutti i termini della successione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

si definisce la successione $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
$= s_{n-1} + a_n$

se $\lim_n s_n = L$ allora la serie $\sum_0^{\infty} a_n$ è CONVERGENTE (e la somma $L$)

se $\lim_n s_n = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ allora la serie $\sum_0^{\infty} a_n$ è DIVERGENTE

se $\lim_n s_n$ NON ESISTE la serie è IRREGOLARE

Se la serie converge (cioè $\lim_{n} s_n = L < +\infty$)
allora $\lim_{n} a_n = 0$ (DIMOSTRATO IERI
DIMOSTRAZ DA SAPERE)

La condizione $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ NON BASTA per assicurare che la serie converga, cioè che $\lim_{n \to +\infty} s_n = L \cancel{<} +\infty$.

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \right]$ SERIE ARMONICA

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

LA SERIE ARMONICA È DIVERGENTE

dim:
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$s_{2n} = \boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} =$$

$$= s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{SONO } n \text{ termini}} \geq s_n + \cancel{n} \cdot \frac{1}{2\cancel{n}}$$

CIASCUNO MAGGIORE di $\frac{1}{2n}$: $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$ $\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n} \dots$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$s_6 = s_{2\cdot 3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = s_3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$\geq s_3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = s_3 + 3 \cdot \frac{1}{6}$$

$$s_{2n} \geq s_n + n \cdot \frac{1}{2n} = s_n + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = L \qquad \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = L$$

$$L \geq L + \frac{1}{2}$$

(IMPOSSIBILE

$s_n$ NON PUÒ AVERE LIMITE FINITO)

$\lim_{n\to+\infty} s_n$ esiste

$s_n \geq 0 \ \forall n \qquad s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} \geq s_n$ CRESCENTE

$s_n$ non può avere limite finito

(perché se lo avesse $L \geq L + \frac{1}{2}$ IMPOSS

$0 \geq \frac{1}{2}$ NO)

$s_n$ deve avere limite $+\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

**Proposizione**: Se $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora la serie di termine $a_n$

$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)$ NON PUÒ ESSERE

IRREGOLARE (o converge o diverge a $+\infty$)

(le serie a termini positivi NON SONO mai irregolari).

dim $\quad s_n = a_0 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$

$a_n \geq 0$

$\forall i$

$s_n$ è SUCCESSIONE CRESCENTE $\Rightarrow$ ha LIMITE FINITO o INFINITO.

SERIE a termini POSITIVI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $a_n \geq 0 \ \forall n$

CRITERI DI CONVERGENZA (SOLO PER SERIE a termini POSITIVI)
(criteri che mi dicono se la serie converge o diverge).

1) CRITERIO DEL RAPPORTO $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $a_n \geq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

se $0 \leq L < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE
(NON SO CHI SIA LA SOMMA).

se $L > 1$ la serie DIVERGE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

se $L = 1$ NON HO INFORMAZIONI

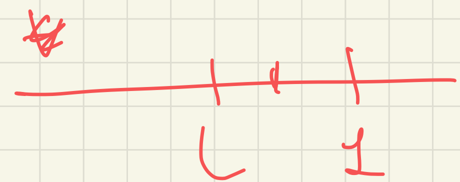
(perché funziona così

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1}$$

$\left( \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1 \Rightarrow \lim a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \right)$

$\to$ criterio del rapporto per successioni: mi dice $\lim_n a_n = 0$

$$\forall n \geq n_0 \quad L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L+\varepsilon < 1$$




$$\varepsilon = \left(\frac{1-L}{2}\right) > 0$$

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < L+\varepsilon \qquad a_{n_0+1} < (L+\varepsilon)\, a_{n_0}$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < L+\varepsilon \qquad a_{n_0+2} < (L+\varepsilon)\, a_{n_0+1} < (L+\varepsilon)^2 a_{n_0}$$

$$\rightarrow a_{n_0+k} < a_{n_0}(L+\varepsilon)^k$$

$$a_{n_0+n} < a_{n_0}(L+\varepsilon)^n \qquad L+\varepsilon < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_{n_0+n}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n_0}) \cdot \underbrace{(L+\varepsilon)^n} = \underbrace{a_{n_0}} \frac{1}{1-(L+\varepsilon)}$$

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq a_{n_0} \frac{1}{1-(L+\varepsilon)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1}} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

## 2) CRITERIO della RADICE n-ESIMA

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0,+\infty] \qquad a_n \geq 0$$

se $L<1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (NON SO SOMMA)

se $L>1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ DIVERGE

se $L=1$ NON HO INFORMAZIONI

$$\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = L \qquad \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n \approx (L)^n \Rightarrow a_n \approx L^n \quad n\to+\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} L^n$$

Es Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right)$$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} > 0 \quad \forall n$$

applico criterio del rapporto.

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{n!\,(n+1)}$$

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}_{} \cdot (n+1)$$

$$= n! \cdot (n+1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{\cancel{n!}\,(n+1)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 = L$$

LA SERIE CONVERGE per CRIT. del RAPPORTO.

Es Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie (cioè la convergenza o divergenza della serie)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\alpha^2)^n}{2^n \; n} \qquad a_n = \frac{(1+\alpha^2)^n}{2^n \cdot n} > 0$$

$\alpha^2 \geq 0 \qquad 1+\alpha^2 \geq 1$

posso applicare o criterio del rapporto o criterio della radice n-esima

$$\sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{(1+\alpha^2)^n}{2^n \cdot n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\left((1+\alpha^2)^{\cancel{n}}\right)^{\cancel{\frac{1}{n}}}}{(2^{\cancel{n}})^{\cancel{1/n}} \; n^{1/n}} = \frac{(1+\alpha^2)}{2 \cdot n^{\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\alpha^2)}{2\, n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1+\alpha^2}{2}$$

$$n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\lg n} = e^{\frac{\lg n}{n}} \to e^0 = 1$$

$\frac{\lg n}{n} \to 0$ per confronto tra infiniti

$$a^b = e^{\lg(a^b)} = e^{b \lg a}$$

$a > 0$

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\frac{\lg n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\boxed{\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1+\alpha^2}{2} = L}$$

(parentesi se avessi utilizzato criterio del rapporto

$$a_{n+1} = \frac{(1+\alpha^2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{(1+\alpha^2)^n \cdot (1+\alpha^2)}{2^n \cdot 2\,(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{\cancel{(1+\alpha^2)^n}\,(1+\alpha^2)}{\cancel{2^n} \cdot 2\,(n+1)} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot n}{\cancel{(1+\alpha^2)^n}} =$$

$$= \frac{(1+\alpha^2)}{2}\,\frac{n}{(n+1)} = \frac{(1+\alpha^2)}{2}\,\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} \to \frac{(1+\alpha^2)}{2} = L\,)$$

Se $L > 1$ la serie diverge $\boxed{\alpha < -1,\ \alpha > 1}$

Se $L < 1$ la serie converge $-1 < \alpha < 1$

$$L = \frac{1+\alpha^2}{2} > 1 \implies 1+\alpha^2 > 2 \implies \alpha^2 > 1$$

$$\alpha^2 - 1 > 0 \implies \boxed{\alpha > 1 \text{ e } \alpha < -1}$$

$$L = \frac{1+\alpha^2}{2} < 1 \implies \alpha^2 - 1 < 0 \implies -1 < \alpha < 1$$

se $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ $\qquad L = \frac{1+\alpha^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

$\alpha^2 = 1$

i criteri NON DANNO INFORMAZIONI

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\alpha^2)^n}{2^n \cdot n} \qquad \alpha^2 = 1 \qquad (\alpha = 1 \text{ oppure } \alpha = -1)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+1)^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

per $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ la serie DIVERGE

Se $-1 < \alpha < 1$ la serie converge

Se $\alpha \geq 1$, $\alpha \leq -1$ la serie diverge

~ . ~

ES Studiare la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$$

applico criterio radice n-esima

$$\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n} = e^{\alpha}$$

$$e^{\alpha} = L > 0$$

se $e^{\alpha} < 1 = e^{0} \Rightarrow \alpha < 0$ LA SERIE CONVERGE

se $e^{\alpha} > 1 = e^{0} \Rightarrow \alpha > 0$ LA SERIE DIVERGE

se $e^{\alpha} = 1$ $\alpha = 0$ NON HO INFORMAZIONI riprendo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ e sostituisco $\alpha = 0$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1+0)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \geq 0 \text{ la serie diverge} \\ \alpha < 0 \text{ la serie converge} \end{array}}$$