SERIE NUMERICHE

a_n successione di numeri reali

$(a_n)_n$ è una funzione con dominio un sottoinsieme illimitato dei numeri naturali

$$f: \quad \underset{n}{D \subseteq \mathbb{N}} \longrightarrow a_n \in \mathbb{R}$$

definita la successione $(a_n)_n$ ci associo una seconda successione s_n (SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI)

DEFINIZIONE

$$\boxed{s_n := a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

a_n

$a_n \in \mathbb{R}$
$\forall n$

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$ $\Rightarrow s_n \in \mathbb{R}$

$\vdots$

$s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$

s_k = somma dei termini della successione (a_n) fino al termine a_k

$= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$

$\lim_{n \to +\infty} s_n$ (SE ESISTE) $= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$

= somma degli infiniti termini della successione (a_n).

es: $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ a_n è definita per $n \geq 1$

$s_1 = a_1 = 1$

$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{10}{6}$

$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{16}{24}$.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right] =$$

Se dato una successione a_n ho che

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = L < +\infty \qquad \boxed{s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n}$$

allora dico che la somma infinita di tutti i termini di a_n è uguale a L.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots = L$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}}_{\text{somma}} a_n = L$$

SERIE = SOMMA INFINITA.

Def La serie di termine a_n (= LA SOMMA INFINITA di tutti i termini della successione a_n)

è CONVERGENTE se ESISTE FINITO

il limite di $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$$L = \lim_{n \to +\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

(LIMITE è il limite degli s_n non di a_n!!)

La serie di termine a_n è

DIVERGENTE se

$\lim_{n} s_n = +\infty$ oppure $-\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty \text{ oppure } -\infty$$

La serie di termine a_n è

IRREGOLARE se

$\lim_{n \to +\infty} s_n$ NON ESISTE

Se voglio studiare se esiste finita o infinita la somma degli infiniti termini di una successione a_n, devo determinare la successione s_n e poi farne il limite

per determinare $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

devo identificare $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ e calcolarne il limite.

Una volta che $\text{Rec}(a_n)$ è molto difficile determinare la successione (a_n) (scriverla esplicitamente) tranne in qualche caso speciale.

$$\boxed{q \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{a_n = q^n}$$

$$a_0 = q^0$$
$$a_1 = q^1$$
$$a_2 = q^2$$
$$\vdots$$
$$a_n = q^n$$

es

$q = 3 \qquad a_n = 3^n$

$q = (-1) \qquad a_n = (-1)^n$

$q = \frac{1}{2} \qquad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1<q<1 \quad |q|<1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & \text{se } q>1 \\ \text{NON ESISTE} & q\leq -1 \end{cases}$$

? esiste $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}$ (esiste la somma infinita dei termini della successione q^n?)

$$= 1+q+q^2+q^3+\dots+q^n+q^{n+1}+\dots$$

questa si chiama $\boxed{\text{SERIE GEOMETRICA}}$

Devo determinare.

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Se $q = 1$ $\rightarrow$ $s_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n+1$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$$

la serie è DIVERGENTE

Se $q \neq 1$

$1 - q \neq 0$

$$s_n \cdot (1-q) = [1 + q + q^2 + \dots + q^n](1-q) =$$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \dots - q^{n+1}$$

$q \neq 1$

$$\frac{s_n(\cancel{1-q})}{\cancel{1-q}} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ +\infty & q>1 \\ \text{NON ESISTE} & q\leq -1 \end{cases}$$

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q\cdot q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n\cdot q}{1-q} =$$

se $|q|<1$ $\quad -1<q<1$ $\quad = \frac{1-0\cdot q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

se $q>1$ $\quad = \frac{1-(+\infty)q}{1-q} = \frac{-\infty}{1-q} = +\infty$

$1-q < 0$

se $q\leq -1$ $\quad$ il limite NON ESISTE

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{CONVERGENTE a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{DIVERGENTE a } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{IRREGOLARE} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$q = \frac{1}{2}$

Per studiare convergenza di altre serie numeriche per cui non riesco a scrivere esplicitamente s_n avrò bisogno di trovare alcuni criteri da applicare.

Teorema (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE)

Se la serie di termine a_n è CONVERGENTE (se ESISTE finito $\lim_{n\to+\infty} s_n$)

allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

NON È CONDIZIONE SUFFICIENTE: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

NON È SICURO che la serie sia convergente (Potrebbe essere convergente o divergente o irregolare) dimostrazione

$\left(\text{se } \lim s_n \text{ finito} \Rightarrow \text{ALLORA } \lim_n a_n = 0 \right)$

(MENTRE $\lim_n a_n = 0 \not\Rightarrow \lim s_n$ esiste finito)

$\lim s_n$ esiste finito $\rightarrow \exists L \in \mathbb{R}$

$$L = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} + a_n = L + \lim_n a_n$$

$$L = L + \lim_n a_n \rightarrow \lim_n a_n = 0$$

Come utilizzo questa informazione? Solo in negativo

se ho una successione (a_n) e considero la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

e so che $\lim_n a_n \neq 0$ ALLORA SICURAMENTE la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ NON È CONVERGENTE

OSSERV. La condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ è

solo NECESSARIA e <u>NON SUFFICIENTE</u> perché

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sia CONVERGENTE.

esistono delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ tali che

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

(DIVERGENTE)

(la serie NON È CONVERGENTE)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad n \geq 1$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad a_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \; \ldots$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\overset{?}{\lim} s_n \qquad s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$s_5 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} =$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$s_n \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$s_n \geq \sqrt{n} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty}$$

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$