ES Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+4x}-1-x}{e^{\alpha x}-1-\lg(1+2x)}$$

NUM. $\underline{\sqrt[4]{1+4x}-1-x} =$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2+o(x^2) \qquad x\to 0$$

$$\sqrt[4]{1+4x} = (1+4x)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{(4x)}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{1}{4}-1\right)}(4x)^2+o(4x)^2 =$$

$$= 1+x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}}\right)\cdot\cancel{16}\,x^2+o(x^2) = 1+x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

N. $\sqrt[4]{1+4x}-1-x = \cancel{1}+\cancel{x}-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\cancel{-1}\cancel{-x} =$

$$= x^2\left(-\frac{3}{2}+o(1)\right)$$

D: $e^{\alpha x}-1-\lg(1+2x)$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad \lg(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$e^{\alpha x} = \underbrace{1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha^2x^2+o(x^2)} \qquad \lg(1+2x) = 2x-\frac{1}{2}(2x)^2+o((2x)^2)$$

$$= 2x-\frac{4}{2}x^2+o(x^2)$$

$$= \underbrace{2x-2x^2+o(x^2)}$$

$$e^{\alpha x}-1-\lg(1+2x) = \cancel{1}+\underbrace{\alpha x}+\frac{1}{2}\alpha^2x^2+o(x^2)-\cancel{1}\underbrace{-2x}+2x^2+o(x^2) =$$

$$= \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^2) - 2x + 2x^2 + o(x^2) =$$

$$= \underbrace{(\alpha-2)x} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\right)} x^2 + o(x^2)$$

$$\boxed{\text{Se } \alpha \neq 2 \qquad (\alpha-2) \neq 0}$$

$$D: \quad x\left[\alpha - 2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\alpha^2+2\right)x + o(x)}_{\to 0}\right] =$$

$$= x \cdot \left[\alpha - 2 + o(1)\right]$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{3}{2} + o(1)\right)}{\cancel{x} \cdot \left(\alpha - 2 + o(1)\right)} = \frac{0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{(\alpha-2)} = 0.$$

Se $\alpha = 2$

$$D: \quad 0 + \underbrace{\cancel{(\alpha-2)x}}_{=0} \quad \left(\overbrace{\tfrac{1}{2}\,2^2+2}^{\frac{1}{2}\alpha^2+2}\right)x^2 + o(x^2) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 4 + 2\right)x^2 + o(x^2) = 4x^2 + o(x^2)$$

$$= x^2(4 + o(1))$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{3}{2} + o(1)\right)}{\cancel{x^2}\,(4 + o(1))} = \frac{-\frac{3}{2}}{4} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f derivabile 2 volte in (a,b)

(esiste $f'(x)$, $f''(x)$ $\forall x \in (a,b)$)

SUPPONIAMO DI SAPERE che $f'(x_0) = 0$

per un qualche pto $x_0 \in (a,b)$.

Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è pto di MINIMO LOCALE

$x \to x_0$ $f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \underbrace{f''(x_0)(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2}$

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^2 \left[\underbrace{f''(x_0) + o(1)}_{V_0} \right]$$

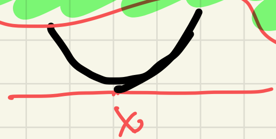
per x vicino a x_0 $\quad (\underline{f'(x_0)} = 0)$

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^2 \left[f''(x_0) + o(1) \right]$$

se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x_0) + o(1) > 0$ per x vicino a x_0

$\Downarrow$

x_0 PUNTO DI MINIMO LOCALE



$$\underbrace{(x-x_0)^2}\left(f''(x_0) + o(1)\right) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

per x vicino a x_0

se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x-x_0)^2 \cdot \left(f''(x_0) + o(1)\right) < 0$ per $x \to x_0$

$\Downarrow$

x_0 PTO DI MAX LOCALE $\Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$

Metodo di NEWTON (metodo delle tangenti)

metodo numerico per determinare soluzioni di equazioni del tipo $\boxed{f(x)=0}$

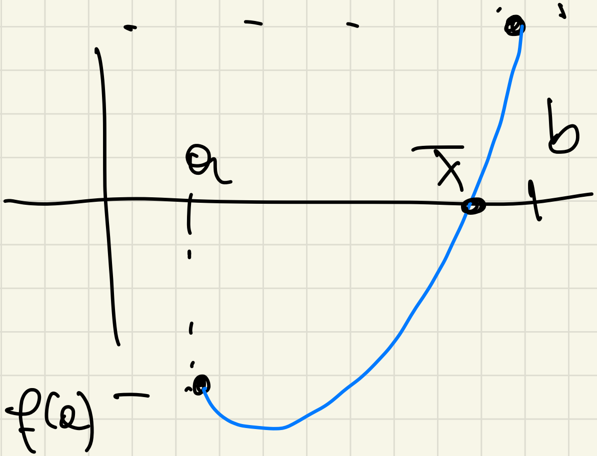
$f: I \to \mathbb{R}$ con f regolare (tale che esiste f', f'') → in particolare f è continua

intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

IPOTESI

esistono $a < b$ $\quad f(a) < 0 \quad f(b) > 0 \quad [a,b] \subseteq I$

e $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ $\quad \boxed{f \text{ convessa}}$



Sotto le ipotesi date

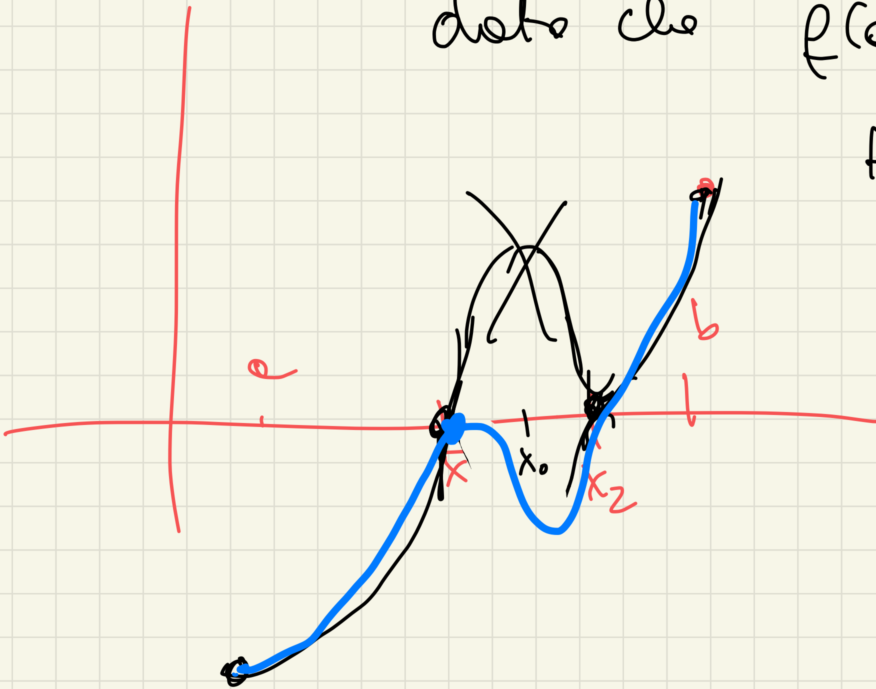
$$\left(\begin{array}{l} f(a)<0, \quad f(b)>0 \\ f''(x)>0 \quad \forall x \in [a,b] \end{array} \right)$$

$\downarrow$

$\Big[$ esiste un UNICO $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$

esistenza $\bar{x}$ (VIENE DA f continua – teorema dei valori intermedi)

unicità $\bar{x}$ viene dalla convessità se ci fossero $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ $\quad f(\bar{x}_1) = 0 = f(\bar{x}_2)$



dato che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

tra $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ dovrē esserci pto di massimo locale

$$\Downarrow$$

$$f''(x_0) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

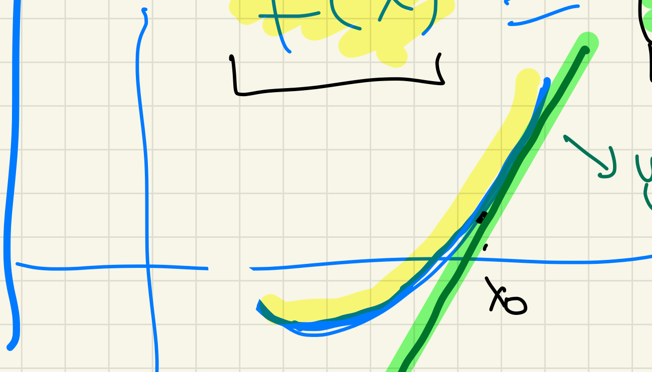
in contraddizione con $f''(x) > 0 \ \forall x$

il metodo di Newton mi permette di determinare "per approssimazioni successive" il pto x.

OSS se f è convessa in $[a,b]$ ($f''(x) \geq 0 \ \forall x$)

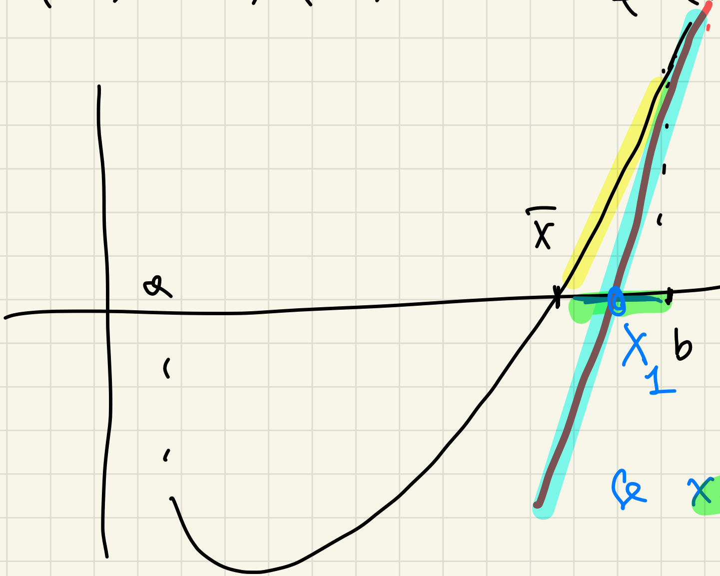
allora $\forall x_0 \in [a,b]$

$$f(x) \geq \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è RETTA TANGENTE a f in x_0

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$ $\quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$



voglio trovare $\bar{x} \in (a,b)$

l'unico pto per cui

$f(\bar{x}) = 0$.

se $x \in [\bar{x}, b] \rightarrow \begin{bmatrix} f(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{bmatrix}$

retta tangente al grafico di f per b.

equazione

$$\boxed{y = f(b) + f'(b)(x-b)}$$

x_1 è INTERSEZIONE TRA RETTA TANGENTE e asse x $\quad y = 0$

$$\begin{cases} y = f(b) + f'(b)(x-b) \\ y = 0 \end{cases}$$

$\to$ eq. retta tangente in b

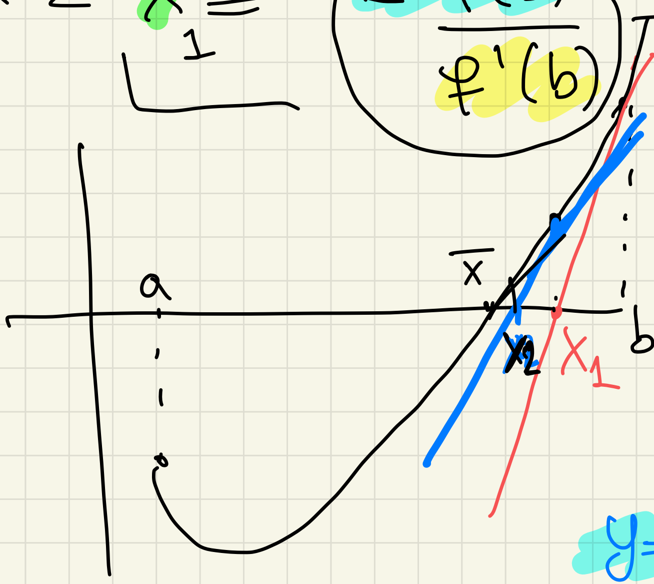
$\to$ asse x

$f(x) > 0$

$f'(x) > 0$

$$0 = f(b) + f'(b)(x-b)$$

$$\bar{x} < x_1 = -\frac{f(b)}{f'(b)} + b < b$$



prendo la retta tangente a f passante per $(x_1, f(x_1))$

x_2 è intersezione tra questa retta tangente

$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

e asse x.

$$\bar{x} < x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1 < x_1 < b$$

x_3 pto di intersezione tra la retta tangente a f in $(x_2, f(x_2))$

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$$

e asse x .. $\bar{x} < x_3 = -\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} + x_2 < x_2$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\bar{x} < \underbrace{x_{n+1}} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n < x_n$$

x_n è successione monotona decresc.

e limitata

$\downarrow$

ha LIMITE $\qquad \tilde{x} = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1}$

$$x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n$$

$\downarrow n \to +\infty$

$$\cancel{\tilde{x}} = -\frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} \cancel{+ \tilde{x}}$$

$\tilde{x} = \bar{x}$

$\to f(\tilde{x}) = 0$

Esempio $f(x) = x^2 - 2 - \lg x$ $\quad$ f è definita in $(0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} \qquad f''(x) = 2 + \underbrace{\frac{1}{x^2}} > 0 \quad \forall x \in D.$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \left(-(x^{-1})\right)' = -(-1)\,x^{-1-1} = +\frac{1}{x^2}.$$

Notiamo che $f(1) = 1^2 - 2 - \lg 1 = 1 - 2 - 0 = -1 < 0$

$f(2) = 2^2 - 2 - \lg 2 = 4 - 2 - \lg 2 = 2 - \lg 2 > 0$

(perché $0 = \lg 1 < \lg 2 < \lg e = 1$).

Esiste unico $\bar{x} \in (1, 2)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$ cioè

$$\bar{x}^2 - 2 = \lg \bar{x}.$$

Costruisco la successione $b = 2$

$$x_1 = -\frac{f(2)}{f'(2)} + 2 = -\frac{(2 - \lg 2)}{4 - 1/2} + 2 = \frac{-2 + \lg 2}{7/2} + 2 =$$

$$= -\frac{4+2\lg 2}{7} + 2 = \frac{-4+2\lg 2+14}{7} = \frac{10+2\lg 2}{7} \approx 1{,}6266$$

$$f(x_1) \approx 0{,}159$$

$$x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1 \approx 1{,}566$$

$$f(x_2) \approx 0{,}003$$