UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I

Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Continuità di funzioni e derivata di alcune funzioni elementari

Tutor: Guido Costagliola

Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"It is by logic that we prove,
but by intuition that we discover.
To know how to criticize is good,
to know how to create is better".

-H. Poincaré

1 Continuità di funzioni

1.1 Esercizio 1

Stabilire se le seguenti funzioni $f(x)$ sono continue in $x = 0$.

1. $f(x) = x + \sin x$

2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ 1 - x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x > 0, \\ 1 - x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

1.2 Esercizio 2

Le seguenti funzioni $f(x)$ non sono definite in $x = 0$. Quali valori bisogna attribuire a $f(0)$ affinché le funzioni risultanti siano continue?

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sin x} \qquad (b) \quad f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} \qquad (c) \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

1.3 Esercizio 3

Stabilire se le seguenti funzioni definite a tratti sono continue.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x|+1} & \text{se } x \geq 0, \\ 2 - x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \log(2+x) & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{x - \frac{1}{|x-2|}} & \text{se } x \neq 2, \\ 0 & \text{se } x = 2. \end{cases}$

1.4 Esercizio 4

Sia $f(x)$ una funzione continua definita in $\mathbb{R}$. Supponiamo che valga:

$$x - 5 < f(x) < x + 1.$$

Dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ abbia almeno una soluzione.
Hint: sfruttare il *Teorema dei valori intermedi*.

2 Derivate di funzioni elementari

Utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento, ovvero

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

calcolare le derivate $f'(x)$ delle seguenti funzioni elementari:

$$f(x) = \sin x \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = c \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = e^x \qquad f(x) = \log x \qquad f(x) = x^s \;\text{ con }\; s \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

Continuità di funzioni

Esercizio 1

Per stabilire la continuità delle funzioni date in $x = 0$, dobbiamo verificare che:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \quad \iff \quad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

1. Dato che $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x + \sin x) = 0 = f(0)$, si conclude che la funzione considerata è continua in $x = 0$.

2. Si ha:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 - x) = 1$$
I limiti destro e sinistro non coincidono, dunque la funzione non può essere continua in $x = 0$.

3. Si ha:
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$
pertanto la funzione è continua in $x = 0$.

4. Si ha:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 - x) = 1$$
e $f(0) = 1$. Pertanto la funzione è continua in $x = 0$.

5. Ricordando la definizione di modulo: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, possiamo riscrivere la funzione $f(x)$ come segue:
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ -x & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Ed in particolare $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 0 = f(0)$, dunque la funzione è continua in $x = 0$.

6. Analogamente al caso precedente, la funzione $f(x)$ può essere riscritta come:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Ma questa è la funzione *segno*(x), chiaramente non continua in $x = 0$.

Esercizio 2

Analizziamo singolarmente i casi:

$$(a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot x = 0$$

dunque dobbiamo porre $f(0) = 0$ per rendere la funzione continua.

$$(b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot 3 = 3$$

dunque dobbiamo porre $f(0) = 3$ per rendere la funzione continua.

$$(c) \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

non possiamo assegnare alcun valore reale a $f(0)$ per rendere la funzione $f(x)$ continua in 0, dato che il limite è infinito.

Esercizio 3

1. Si ha:
$$\lim_{x \to 0^+ f(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+2}{|x|+1} = 2$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2 - x) = 2$$
e $f(0) = 2$, dunque la funzione è continua in $x = 0$. Per ogni altro valore reale, non ci sono problemi di continuità.

2. Si ha:
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2} \neq f(0)$$
dunque la funzione non risulta continua in $x = 0$. Invece è continua per ogni altro valore reale.

3. Per la definizione di modulo, $f(x)$ può essere riscritta come segue:
$$f(x) = \begin{cases} \log(2+x) & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$
Dobbiamo allora verificare i limiti destro e sinistro in $x = 1$ e $x = -1$. Partiamo da quest'ultimo:
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \log(2+x) = \log(1) = 0$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$$

e $f(-1) = 0$. La funzione risulta continua in $x = -1$. Invece:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \log(2 + x) = \log(3) \neq 0$$

Perciò la funzione non è continua in $x = 1$.

4. Si ha:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} e^{x - \frac{1}{|x-2|}} = 0 = f(2)$$

dunque la funzione è continua in $x = 2$. Risulta poi continua in tutto il resto dei reali in quanto composizione di funzioni continue.

Nota: vi invito a graficare le funzioni dei precedenti esercizi (usando *Geogebra* o *Mathematica* per esempio) per visualizzarle e vedere che tutto ciò che abbiamo calcolato si può riscontrare a livello grafico.

Esercizio 4

Dall'ipotesi che $x - 5 < f(x) < x + 1$, segue che:

- $f(-2) < -2 + 1 = -1 < 0$
- $f(6) > 6 - 5 = 1 > 0$

Pertanto esiste un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ in cui la funzione $f(x)$ assume un valore positivo e uno negativo agli estremi, dunque, dato che la funzione è continua per ipotesi, esisterà almeno un $x_0 \in I$ tale per cui $f(x_0) = 0$ per il Teorema dei Valori Intermedi.

Derivate di funzioni elementari

Vediamo in dettaglio i calcoli un caso alla volta, sfruttando la definizione.

$$(a) \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin x(1 - \cos h) + \cos x \sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \left[-\underbrace{\frac{1 - \cos h}{h^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot h \sin x + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] = \cos x$$

$$(b) \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos x(1-\cos h) - \sin x \sin h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[-\underbrace{\frac{1-\cos h}{h^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot h \cos x - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] = -\sin x$$

$$(c) \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

$$(d) \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = e^x$$

$$(e) \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] - \log(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\log(x)} + \log\left(1+\frac{h}{x}\right) - \cancel{\log(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(f) \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^s - x^s}{h} = \lim_{h\to 0} x^s \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^s - 1\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^s}{x} \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^s - 1\right]}{\frac{h}{x}} = s x^{s-1}$$

Dove è stato utilizzato:

- in (a) la formula di addizione del seno: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
- in (b) la formula di addizione del coseno: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
- in (e) la proprietà dei logaritmi $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$;
- in (f) il limite notevole: $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = s$.