Es $f(x) = \underbrace{\lg(e^{2x}+4)} \underbrace{-2x}$

$D = \mathbb{R}$

$y=0$ asintoto orizz. a $+\infty$

$y = -2x + \lg 4$ asintoto obliquo a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\lg(e^{2x}+4)}_{\lg(0+4)=\lg 4} \underbrace{-2x}_{-(-\infty)} = +\infty$$

$(\lg x)' = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x}+4} \cdot (e^{2x}\cdot 2 + 0) - 2 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} - 2$$

$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2$

$$= \frac{\cancel{2e^{2x}} - \cancel{2e^{2x}} - 8}{e^{2x}+4}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{e^{2x}+4}$$

f è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

f è strett. decrescente su $\mathbb{R}$.

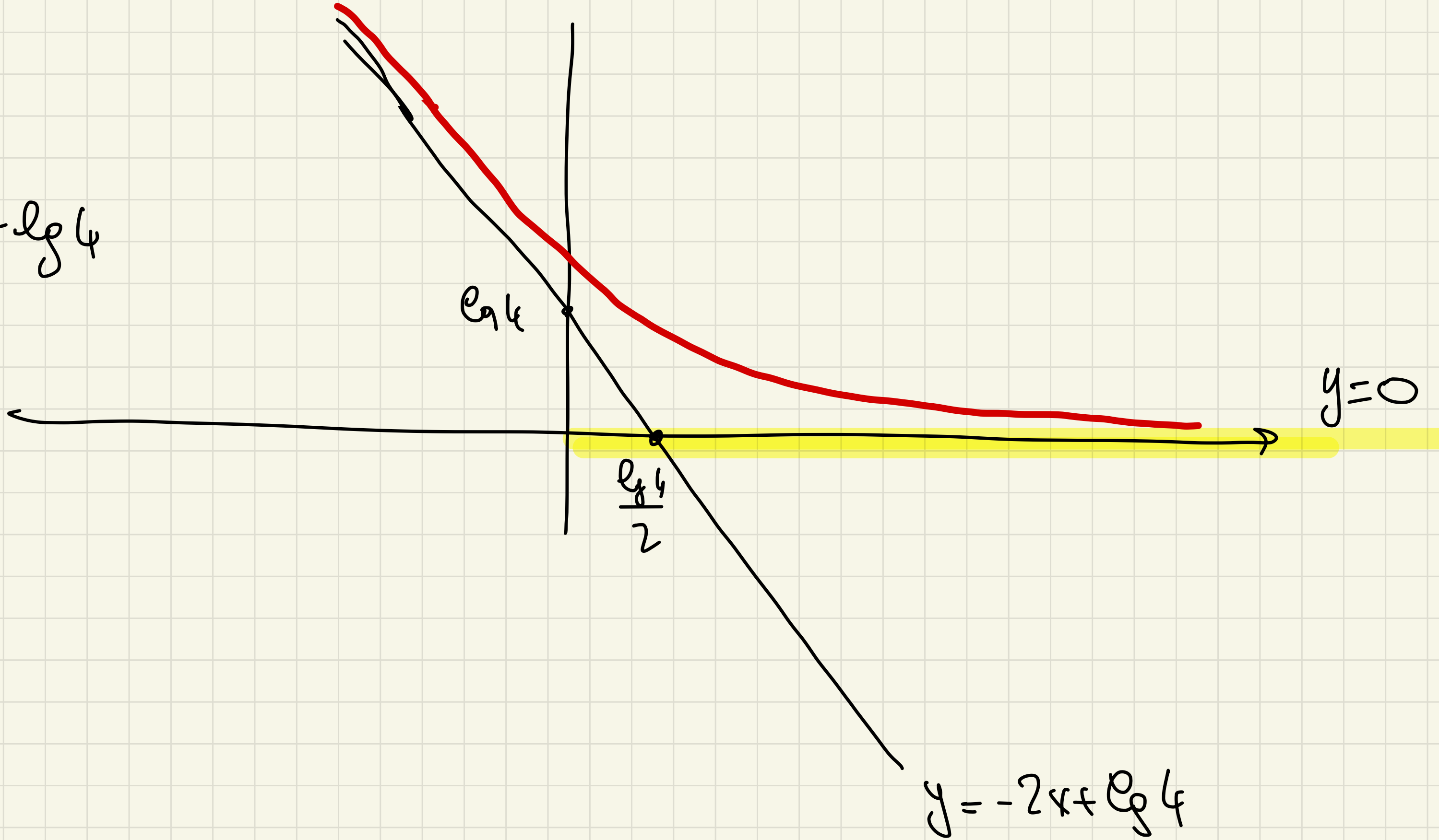
$0 < f(x) < +\infty \quad \forall x$ $\qquad$ f non ha massimi né minimi

$$f''(x) = \left(\frac{-8}{e^{2x}+4}\right)' = \frac{\cancel{0\cdot(e^{2x}+4)} - (-8)\cdot(2e^{2x}+0)}{(e^{2x}+4)^2}$$

$$= \frac{16\,e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2} > 0$$

f è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

$y = -2x + \lg 4$



Infinitesimo

- **Def** Diciamo che f è infinitesimo nel pto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

es. $f(x) = x^k$ $k>0$ sono tutte infinitesime nel pto 0.

$$\lim_{x \to 0} x^k = 0 \qquad (k>0)$$

se f e g sono entrambi infinitesime in x_0 posso considerare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \begin{cases} = 0 & f(x) \text{ è infinitesimo di ORDINE SUPERIORE a } g(x) \\ = \pm\infty & f(x) \text{ è infinitesimo di ORDINE INFERIORE a } g(x) \\ = L \neq 0 & f \text{ è ASINTOTICA a } g \end{cases}$$

$f \sim g$ per $x \to x_0$

$f(x) = 3x^2 + x$ $\qquad$ $g_1(x) = x$

f, g sono INFINITESIME ~~per~~ in $\underline{x_0 = 0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(3x+1)}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 3x+1 = 3\cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$$

$f \sim g$ per $x \to 0$.

$$\boxed{f(x) = 3x^2 \qquad g(x) = x}$$

SE HO SOMMA DI VARI INFINITESIMI devo sempre RACCOGLIERE quello di ORDINE INFERIORE

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2+x}{x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\,(\overbrace{x^3+3x+1}^{\to\, 0^3+3\cdot 0+1\,=\,1})}{\underbrace{\cancel{x}}_{\to 0}\,(\underbrace{x+1}_{\to\, 0+1})} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{x}^{\to 0} - \overbrace{\sin x}^{\to 0} + \overbrace{x^2}^{\to 0}}{\underbrace{1 - \cos x}_{\to 0} + \underbrace{x^3}_{\to 0}}$$

$1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$1 - \cos x \sim x^2$

per $x \to 0$

Posso risolverlo applicando 2 volte l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\quad)'}{(\quad)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + 2x}{\sin x + 3x^2} = \frac{0}{0}$$

applico un'altra volta l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2}{\cos x + 6x} = \frac{2}{1} = 2$$

OPPURE POSSO RISOLVERLO CON UN ALTRO METODO: teorema di Taylor.

Teorema di Taylor (altro strumento per risolvere forme indeterminate - del tipo $\frac{0}{0}$)

Sia f definita in un intervallo contenente $x=0$, $(-a, a)$ $a>0$

e tale che in tale intervallo sia ben definita anche la derivata prima $f'(x)$, la derivata seconda $f''(x)$, la derivata della derivata seconda (derivata terza $f^{(3)}(x)$), la derivata della derivata terza (derivata quarta $f^{(4)}(x)$) e via così

$f^{(n)}(x)$ derivata di f fatta $\underline{\underline{n}}$ volte

ogni volta che fisso $N \in \mathbb{N}$ $\underline{\underline{N > 0}}$ posso trovare un polinomio nella variabile x di grado $\leq N$, $P_N(x)$, tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_N(x)}{x^N} = 0$$

$f(x) - P_N(x) \to 0$

$f(x) - P_N(x)$ è INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a x^N.

$$P_N(x) := \underbrace{f(0)} + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)\,x^4 + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(0)\,x^N .$$

$f(x) - P_N(x)$ è INFINITESIMO di ORDINE SUPERIORE a x^N.

$\downarrow$

$P_N(x)$ approssima $f(x)$ per x vicino a 0 con un "ERRORE MINORE di x^N".

Es $\quad f(x)=e^x \quad f'(x)=e^x \quad f^{(n)}(x)=e^x \ \forall n$

$N\in\mathbb{N}$ $\quad P_N(x)$ = polinomio di Taylor (o di Mc Laurin) associato a e^x

$$P_4(x)=e^0+e^0x+\frac{1}{2}e^0x^2+\frac{1}{3!}e^0x^3+$$
$$+\frac{1}{4!}e^0x^4=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$$

$$e^x\approx P_4(x)$$

x vicino a 0

per $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

a meno di errore $\leq \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000}$

$$e^{-0,02} \approx 1 + (-0,02) + \frac{1}{2}(-0,02)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}(-0,02)^3 + \frac{1}{12}(-0,02)^4$$

Es $\quad \log(1+x) = f(x) \qquad D \quad 1+x>0$

$x>-1$

$\underbrace{f \text{ è ben definita in } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot (0+1) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{0\cdot(1+x) - 1\cdot(0+1)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\underbrace{(1+x)^2}}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{0\cdot(1+x)^2 - (-1)\, 2\cdot(1+x)\cdot(0+1)}{(1+x)^4} = \frac{2(\cancel{1+x})}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(0)\,x^3$$

$$P_3(x) = \overset{=0}{\cancel{\log(1+0)}} + \frac{1}{1+0}\cdot x + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(1+0)^2}\right)x^2 +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{6}\,3}\cdot\left(\frac{\cancel{2}}{(1+0)^3}\right)x^3 =$$

$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(6)}(x) = -\sin x$$

$$P_5(x) = \cancel{\sin 0} + \overbrace{\cos 0}^{=1} \cdot x + \cancel{\frac{1}{2}(-\sin 0)\, x^2} +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot (-\cos 0)\, x^3 + \cancel{\frac{1}{4!}(\operatorname{sen} 0)\, x^4} + \frac{1}{5!}(\cos 0)\, x^5$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 = P_6(x)$$

f dispari $\rightarrow$ $P_N(x)$ ha solo POTENZE DISPARI

---

f pari $\rightarrow$ $P_N(x)$ ha solo potenze PARI

$\boxed{f(x) = \cos x}$ $\quad f'(x) = -\sin x \quad f''(x) = -\cos x$

$f^{(3)}(x) = \sin x \quad f^{(4)}(x) = \cos x$

$$P_4(x) = \cos \overset{=1}{0} + \cancel{(-\sin \overset{=0}{0}) \cdot x} + \frac{1}{2}(-\cos 0)\, x^2 + \cancel{\frac{1}{3!}(\sin 0)\, x^3} + \frac{1}{4!}(\cos \overset{1}{0})\, x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = P_5(x).$$

INTRODUCO una notazione "sintetica" per esprimere il fatto che

$f(x) - P_N(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a x^N (cioè che

$P_N(x)$ approssima $f(x)$ vicino a $x = 0$

con un errore minore di x^N).

NOTAZIONE "o" PICCOLO (simboli di Landau)

$\boxed{x \to 0}$

$o(1) :=$ insieme di tutte le funzioni INFINITESIME per $x \to 0$ $=$

$= \{ f, \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \}$

$k > 0$

$o(x^k) = \{$ insieme di tutte le funzioni che sono infinitesime di ordine superiore a $x^k \} = \{ f, \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = 0 \}$

$o(x^k) \subseteq o(1)$

se f è $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = 0$ → in particolare $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$f \in o(x^k)$ ⟶ $f \in o(1)$

$o(x^n) \subseteq o(x^m)$

$\boxed{n > m}$

$f \in o(x^n)$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$

$x^n = \underbrace{x^m}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{x^{n-m}}_{\downarrow\, 0}$

$n > m$

$f \in o(x^n)$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$

$x^n = x$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} = 0$

$\downarrow$

0

$n > m$

$n - m > 0$ $\quad x^{n-m} \to 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} = 0}$ $\to f \in o(x^m)$

$o(1) \supseteq o(x) \supseteq o(x^2) \ldots$

es $\sin x \in o(1)$ ma

$\operatorname{sen} x \notin o(x)$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \neq 0$

$1-\cos x \in o(1)$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

$1-\cos x \in o(x)$

$1-\cos x \notin o(x^2)$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \neq 0$

teorema di Taylor

$$f(x) = P_N(x) + o(x^N)$$

$$\left(f(x) - P_N(x) \in o(x^N) \right.$$

$$\left. \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_N(x)}{x^N} = 0 \right)$$