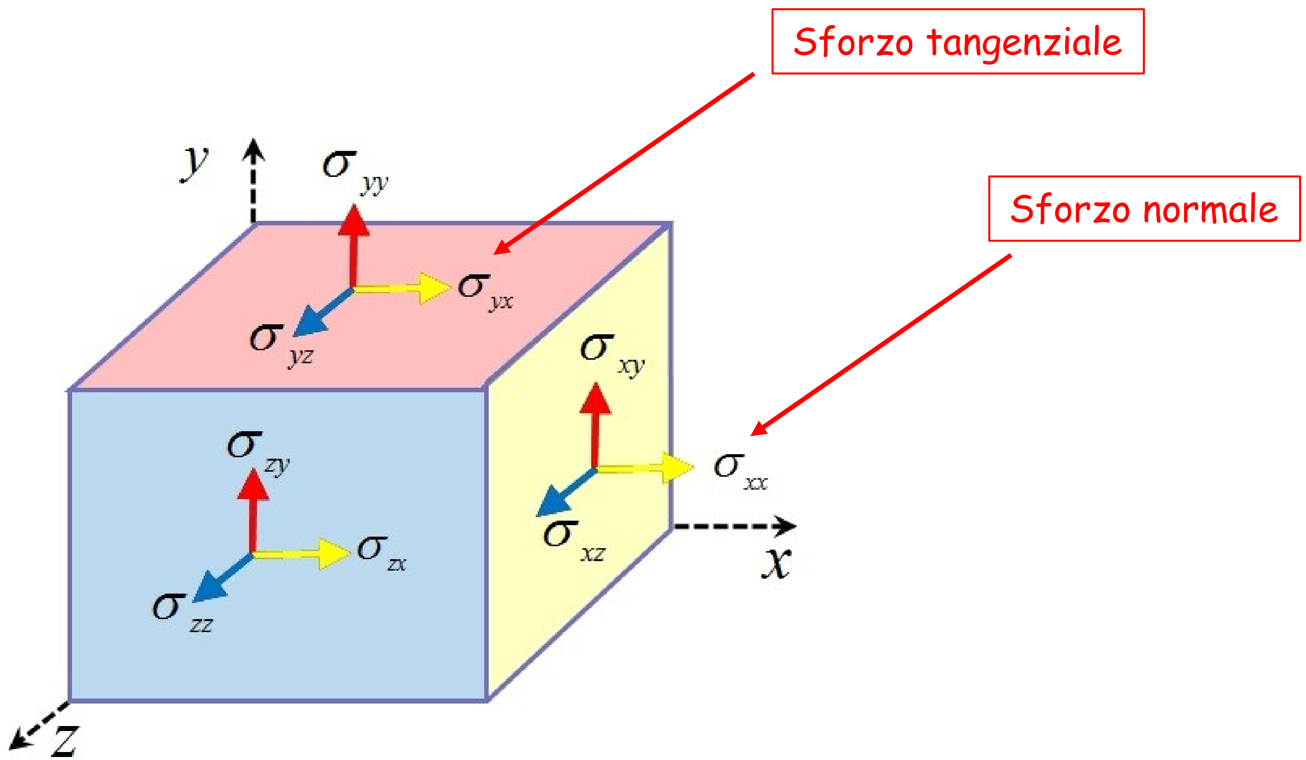
Elementi di viscoelasticità lineare

Concetti fondamentali: sforzo, deformazione, flusso, modulo elastico, viscosità

Faccia x

Faccia y

Faccia z

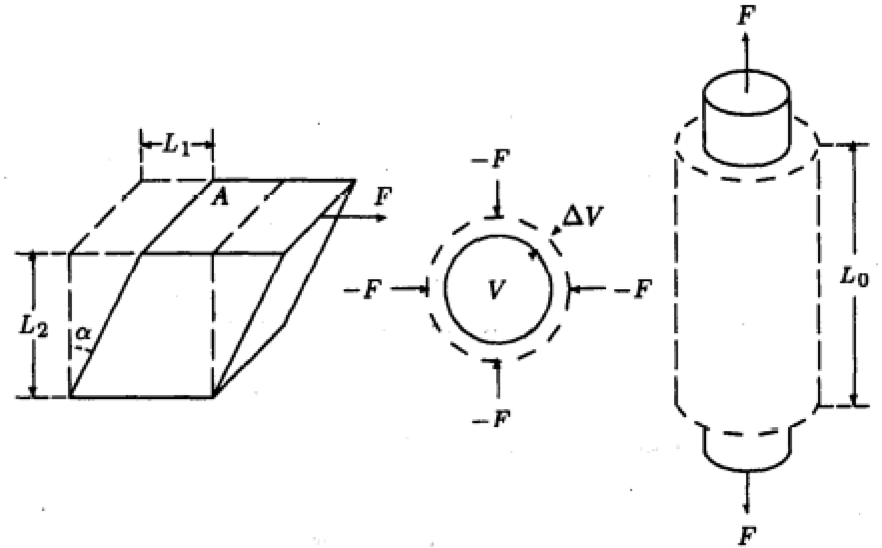


Componenti del tensore degli sforzi

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Solido elastico



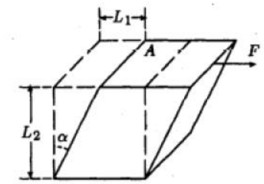
Deformazione di taglio (V=cost.)

Compressione (forma=cost.)

Trazione uniassiale

Deformazione di taglio

$$\gamma_{yx} = tan\alpha = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{G}\frac{F}{A} = \frac{1}{G}\sigma_{yx}$$

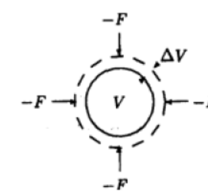


$$\tau = G\gamma$$

dove G è il coefficiente di proporzionalità detto modulo di rigidità a taglio σ_{yx} spesso è indicato con ⇒ τ

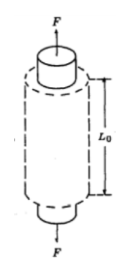
Compressione

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K}\frac{F}{A}$$



dove K è il modulo di rigidità di volume

Tensione uniassiale (tensile strength)



$$\sigma = E\varepsilon$$

Legge di Hooke

dove E è il modulo di Young

I moduli G, K, E sono correlati mediante il coefficiente di Poisson

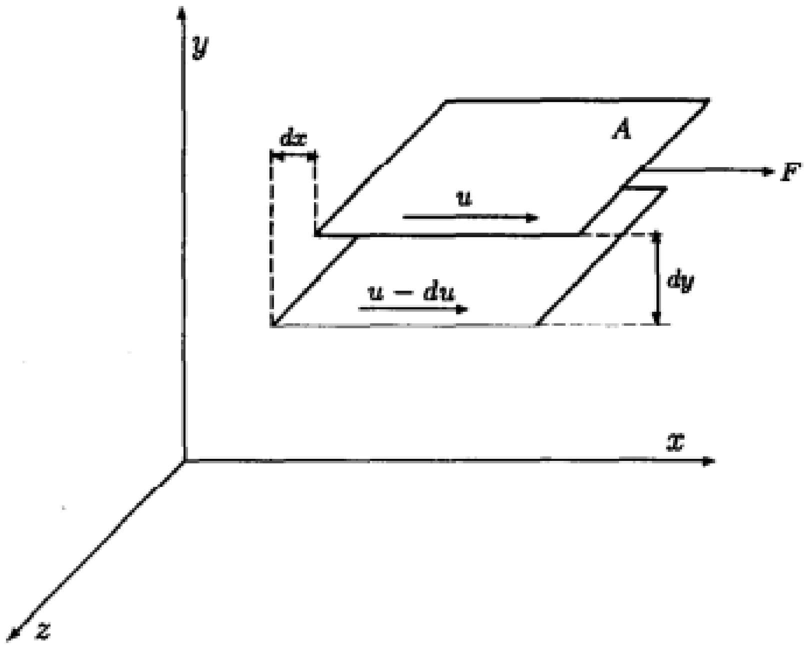
$$\nu = 0.5\left(1 - \frac{1}{V}\frac{dV}{d\varepsilon}\right)$$

$\mathrm{dV} = 0$ per i corpi incomprimibili

le relazioni tra i moduli sono:

$$E = 3K(1 - 2\nu) = 2G(1 + \nu)$$

Fluido viscoso



Deformazione $\gamma = \dfrac{dx}{dy}$

Gradiente di velocità $\dfrac{du}{dy}$

dove $u = \dfrac{dx}{dt}$

Sforzo, gradiente di velocità e velocità di deformazione di taglio

Definizioni

Flusso viscoso: processo di deformazione nel quale l'energia meccanica viene dissipata sotto forma di calore, se completamente, flusso puramente viscoso.

Viscosità: resistenza opposta dal materiale a fluire sotto l'azione dello sforzo.

- La deformazione indotta dalla forza $\gamma = \frac{dx}{dy}$
- Gradiente di velocità è $\frac{du}{dy}$ dove $u = \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow$Il gradiente di velocità è uguale alla velocità di deformazione di taglio $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$

Il coefficiente di proporzionalità fra sforzo tangenziale, o di taglio $\tau = \frac{F}{A}$ e la velocità di deformazione è la viscosità η:

$$\tau = \eta\dot{\gamma} \quad \textbf{Legge di Newton}$$

Se η è costante il fluido è detto Newtoniano

Solido elastico

$\Downarrow$

$\sigma = E\varepsilon$ Legge di Hook

Fluido viscoso

$\Downarrow$

$\tau = \eta\dot{\gamma}$ Legge di Newton

Materiale viscoelastico

Per il solido di Hooke e il fluido Newtoniano valgono relazioni lineari tra sforzo e deformazione e tra sforzo e velocità di deformazione, i coefficienti di proporzionalità E e η sono indipendenti sia dallo sforzo che dalla deformazione.
Se questo vale per un materiale viscoelastico allora si parla di

viscoelasticità lineare

Viscoelasticità lineare

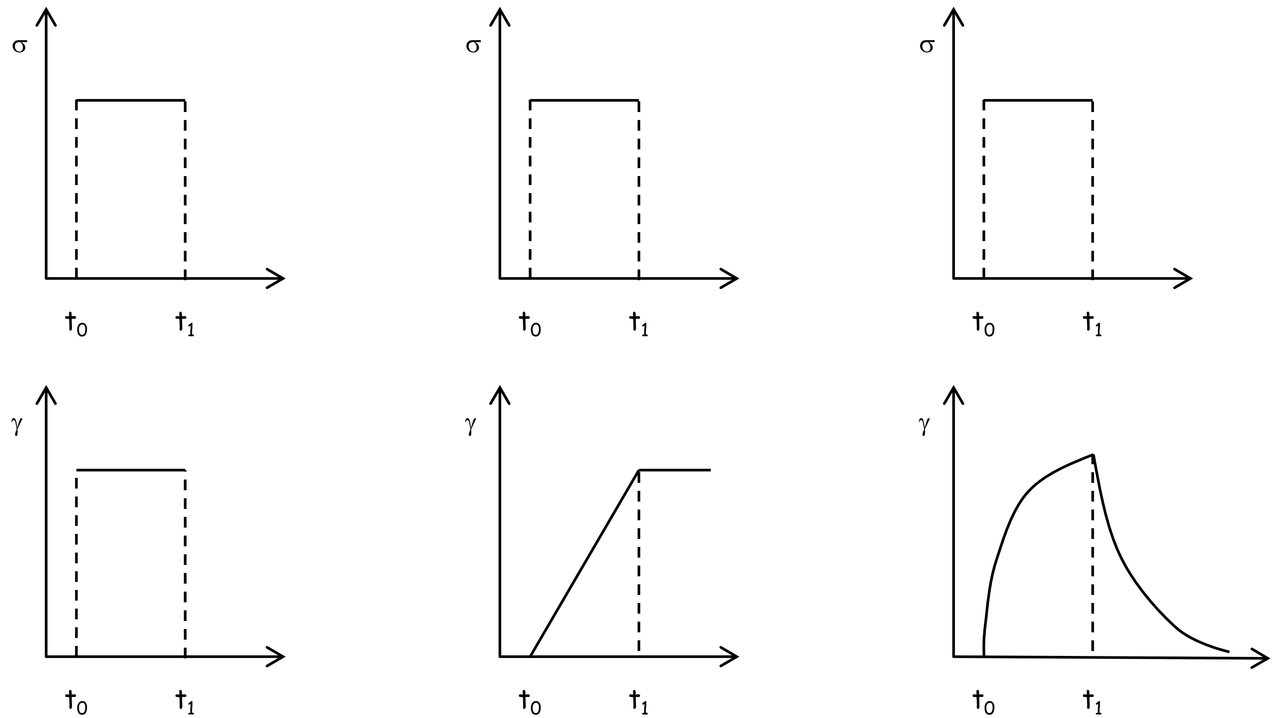
Solido elastico

Materiale viscoelastico

Fluido viscoso

Esperimento di creep

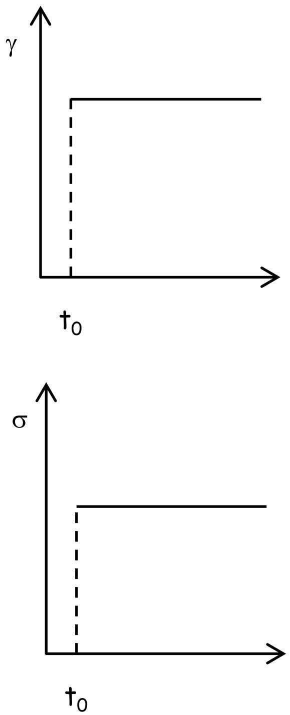
Si osserva la deformazione causata da uno sforzo σ applicato istantaneamente in t_0 e tolto istantaneamente in t_1



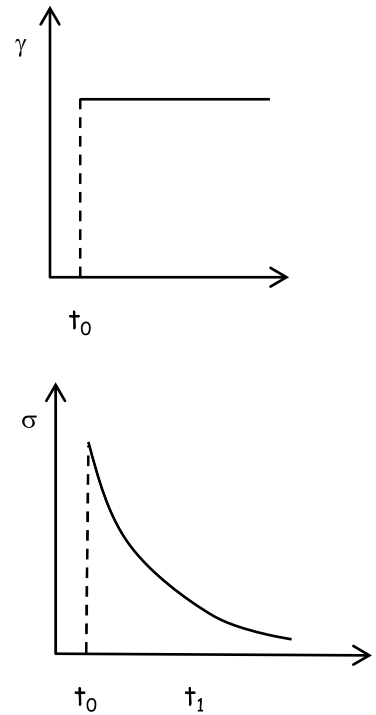
Solido elastico   Fluido viscoso   Corpo viscoelastico

Esperimento di rilassamento

Si deforma istantaneamente il materiale al tempo t_0 e si misura lo sforzo necessario per mantenere costante la deformazione



Solido elastico



Corpo viscoelastico

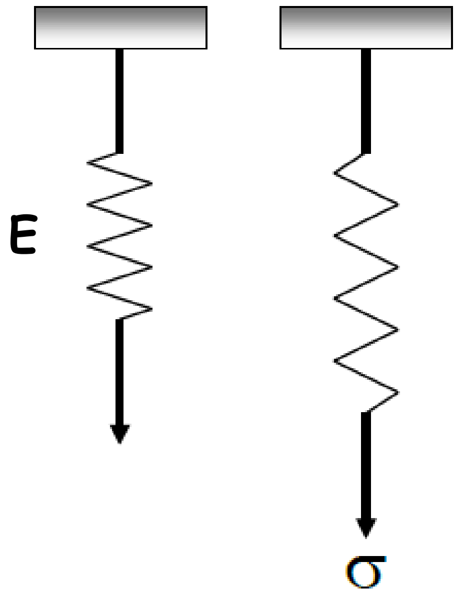
Modelli viscoelastici

Solido elastico

Lo sforzo applicato *genera* una deformazione completamente recuperabile

Tutta l'energia applicata viene mantenuta e poi rilasciata

Modello del solido elastico



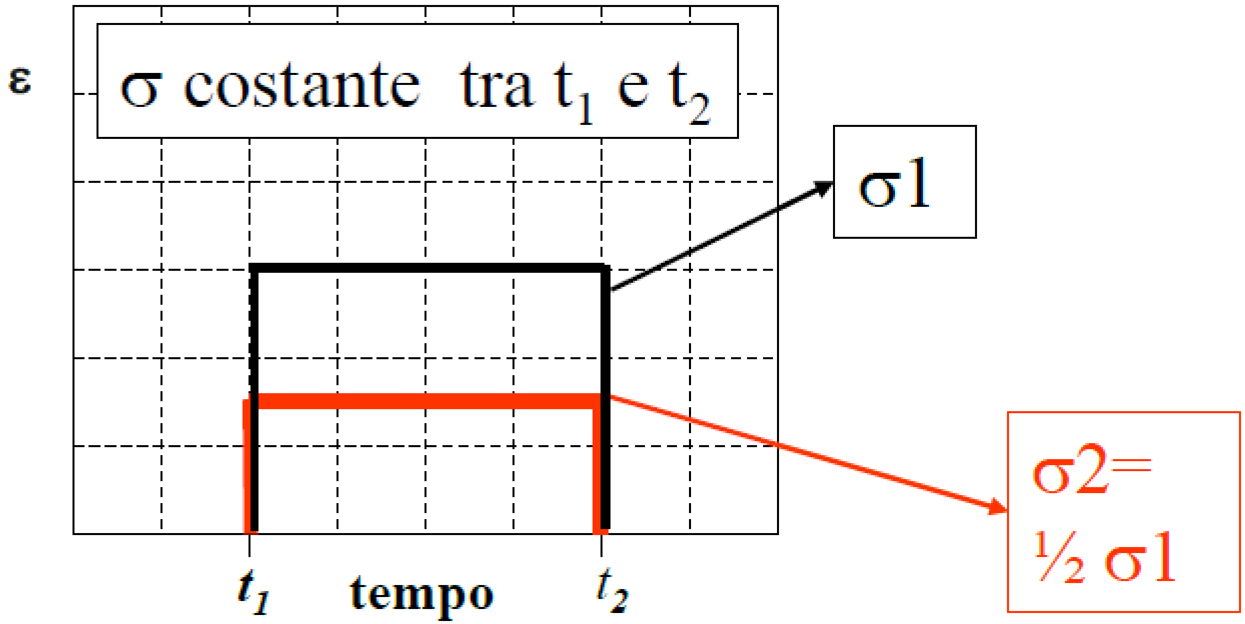
Il solido elastico si comporta come una molla di costante elastica E, pari al suo modulo di Young

Esiste una proporzionalità diretta tra lo sforzo e la deformazione (vale la legge di Hooke: $\sigma = E\varepsilon$)

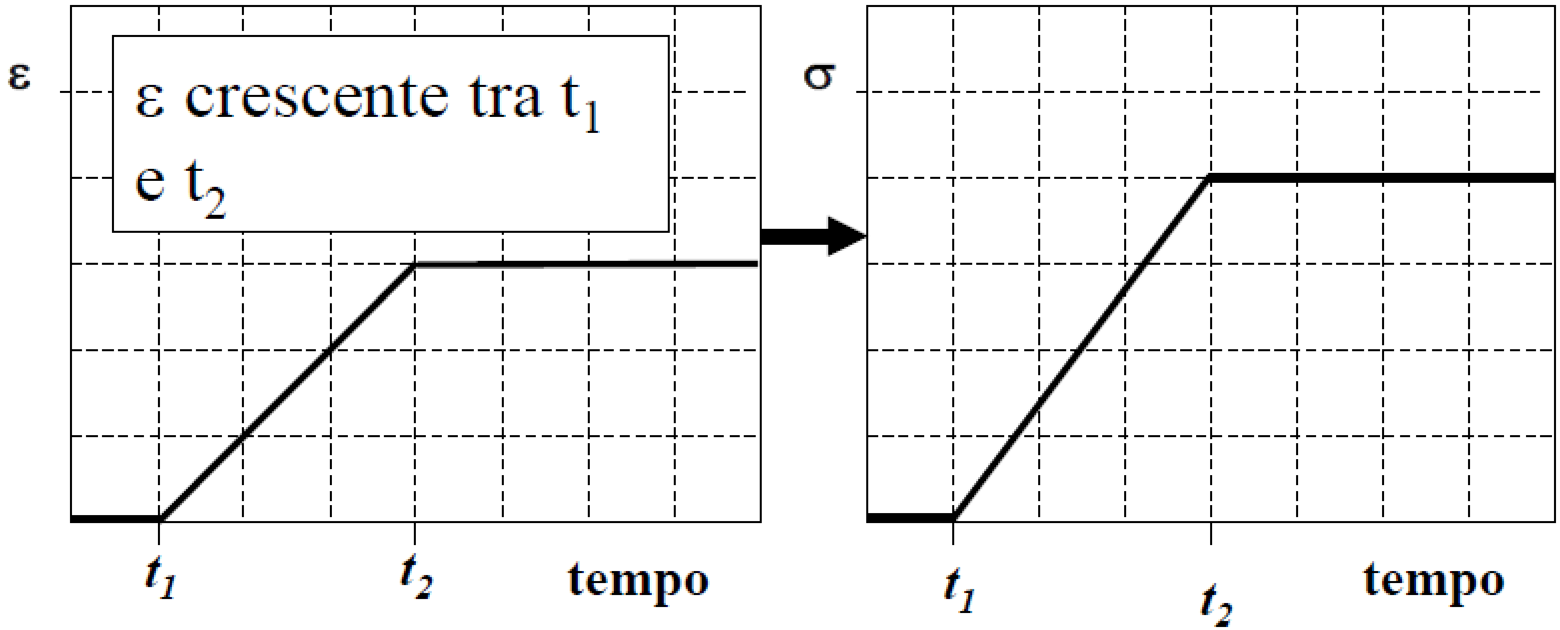
La deformazione **non** dipende **dal tempo di applicazione** dello sforzo

Al cessare dell'applicazione dello sforzo la deformazione è recuperata integralmente e immediatamente

Se lo sforzo è costante nel tempo, lo è anche la deformazione, che si annulla al cessare dello sforzo



Se lo sforzo aumenta nel tempo, anche la deformazione aumenta proporzionalmente



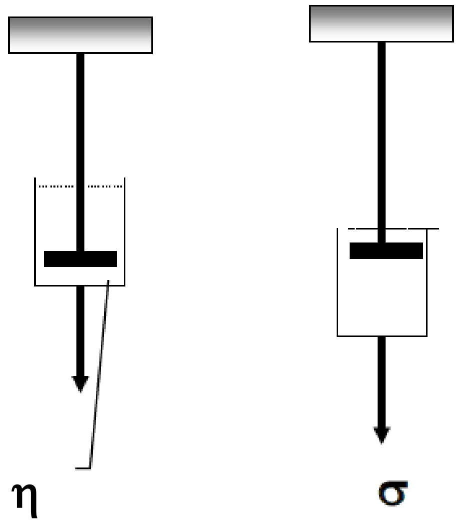
Fluido viscoso

Lo sforzo applicato genera una deformazione permanente

Tutta l'energia applicata viene dissipata

Lo sforzo tangenziale causa un gradiente di velocità uguale alla velocità di deformazione

Modello del fluido viscoso



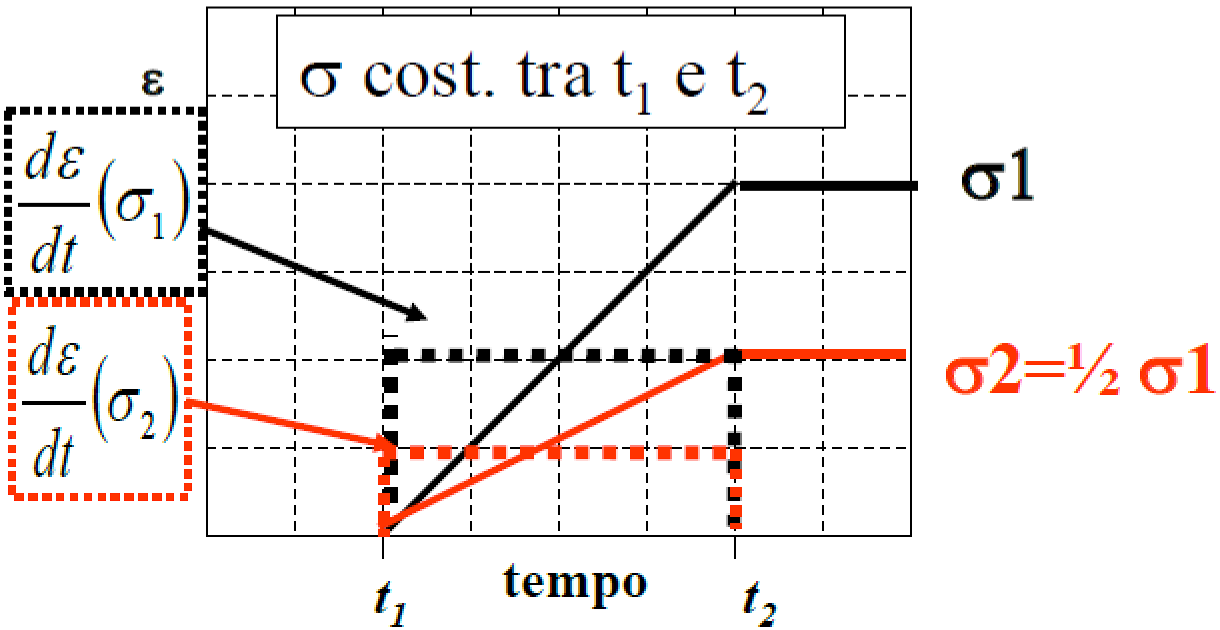
Il fluido elastico si comporta come un pistone che si muove in un fluido di viscosità η, pari alla sua

Esiste una proporzionalità diretta tra lo sforzo e la velocità di deformazione (vale la legge di Newton: $\tau = \eta\dot{\gamma}$)

La velocità di deformazione **non** dipende **dal tempo di applicazione** dello sforzo

Al cessare dell'applicazione dello sforzo la deformazione è permanente

Se lo sforzo è costante nel tempo, lo è anche la velocità di deformazione, che si annulla al cessare dello sforzo



Invece la deformazione aumenta linearmente e rimane permanente al cessare dello sforzo

Corpo viscoelastico

Lo sforzo applicato genera una deformazione che può essere parzialmente recuperata se l'energia applicata non viene totalmente dissipata

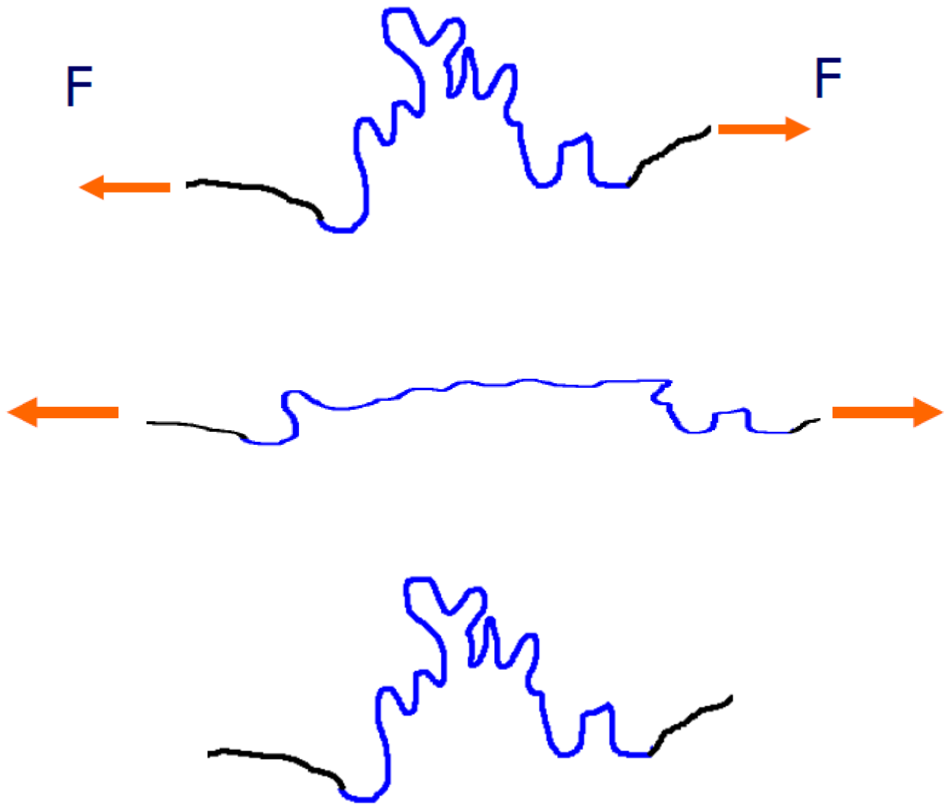
Non c'è proporzionalità diretta tra sforzo e deformazione o velocità di deformazione

Materiale viscoelastico polimerico

La caratteristica peculiare dei polimeri è che la risposta elastica è dovuta al ritorno del sistema al massimo livello di disordine e quindi di entropia, questa è la "driving force" che permette il recupero della forma macroscopica quando lo sforzo è rilasciato

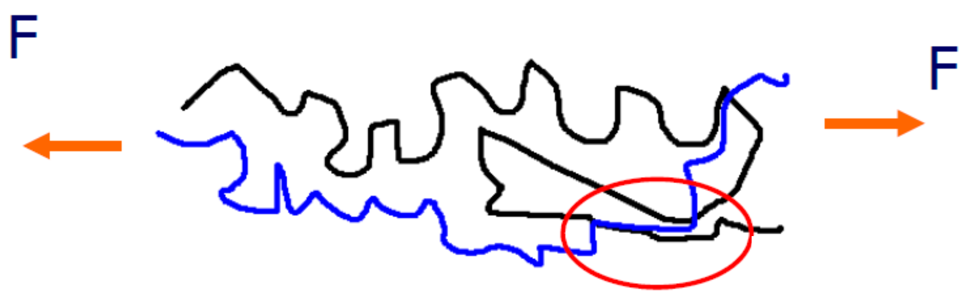
Materiale viscoelastico polimerico

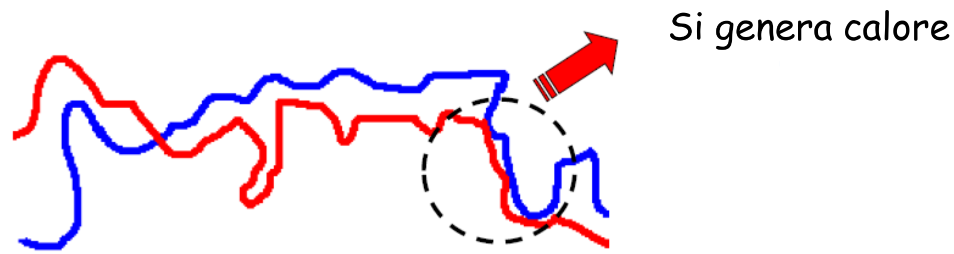
Comportamento elastico



Materiale viscoelastico polimerico

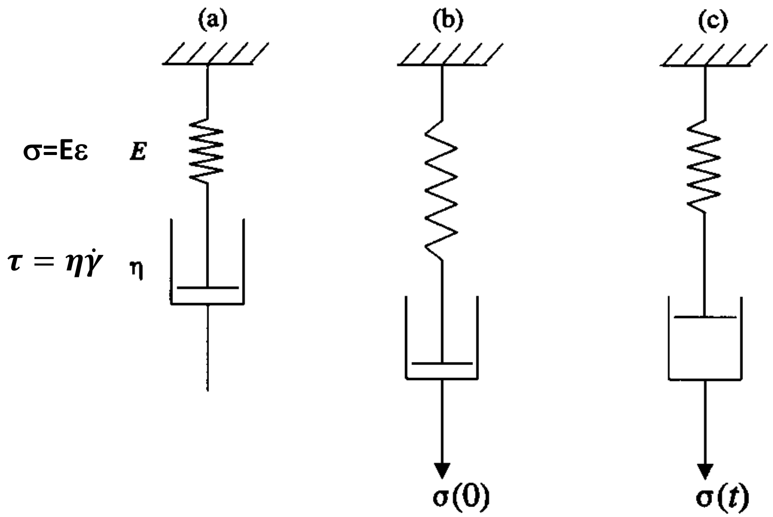
Comportamento viscoso





Modelli viscoelastici

Modello di Maxwell: fluido viscoelastico

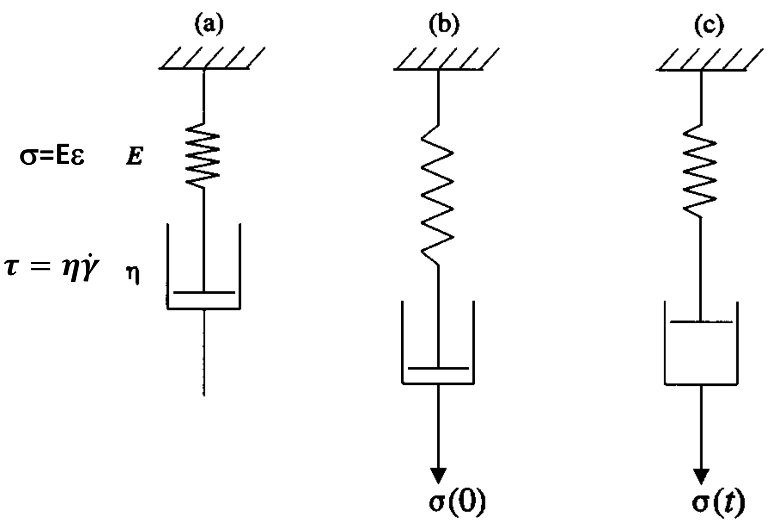


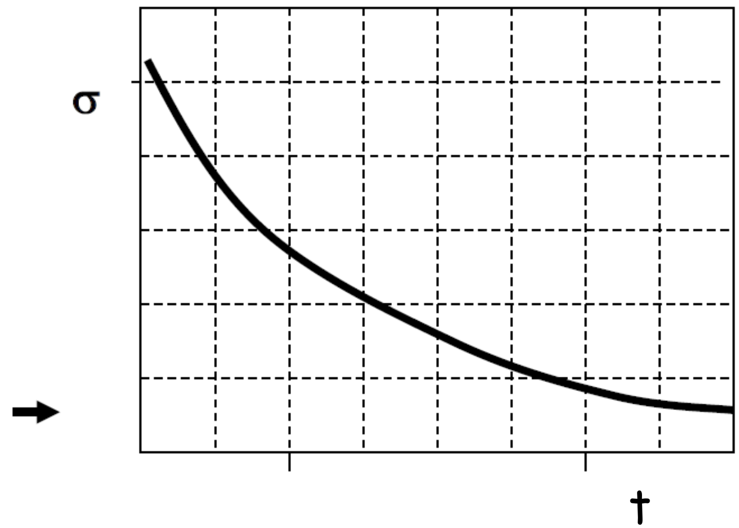
(a) sistema a riposo
(b) si applica σ_0 a t=0 e si mantiene ε costante
(a) sistema dopo un tempo t

A t=0 viene applicato lo sforzo $\sigma(0)=\sigma_0$, che sarà uguale sia per la componente elastica che per quella viscosa, la deformazione sarà $\varepsilon=\varepsilon_H+\varepsilon_N$
Si vuole determinare $\sigma(t)$ quando si mantiene costante la deformazione ε

Modelli viscoelastici

Modello di Maxwell: fluido viscoelastico





E' un esperimento di rilassamento, lo sforzo decade con il tempo

Modelli viscoelastici

Modello di Maxwell: fluido viscoelastico

$\sigma = E\varepsilon$
$\sigma = \eta(d\varepsilon/dt)$

$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_N$

$d\varepsilon/dt = d\varepsilon_H/dt + d\varepsilon_N/dt$

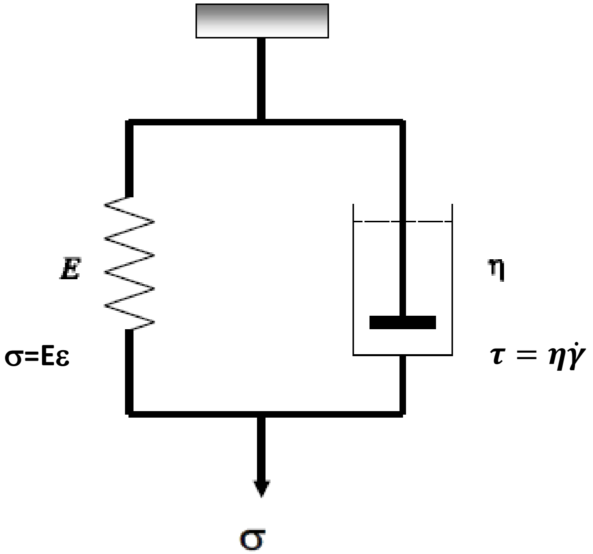
$d\varepsilon/dt = 1/E\,(d\sigma/dt) + \sigma/\eta$
se ε è costante, $d\varepsilon/dt = 0$

$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t/\lambda)$ dove $\lambda = \eta/E$ è detto tempo di rilassamento

In un tempo sufficientemente lungo lo sforzo si annulla e la deformazione diventa permanente (fluido viscoso)

Modelli viscoelastici

Modello di Kelvin-Voigt: solido viscoelastico

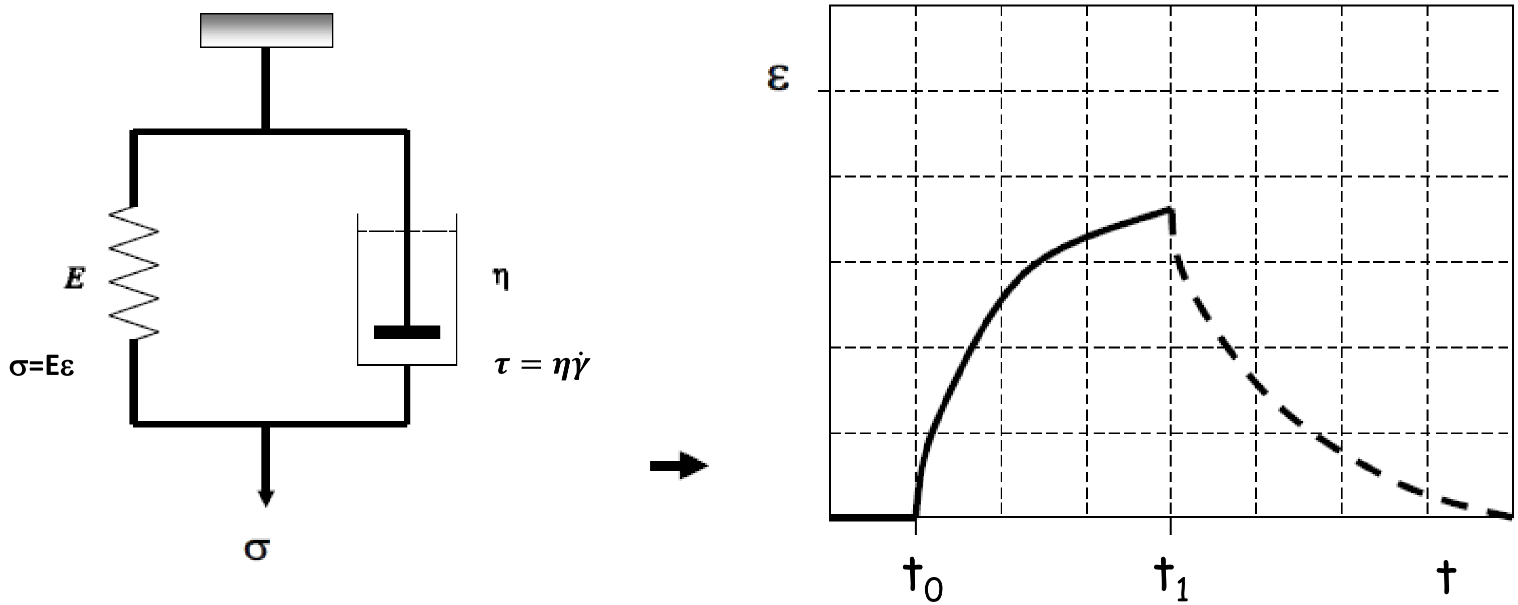


A t=0 viene applicato lo sforzo $\sigma = \sigma_H + \sigma_N$, che sarà mantenuto costante fino a t_1, la deformazione ε sarà uguale sia per la componente elastica che per quella viscosa

Si vuole determinare $\varepsilon(t)$ quando si mantiene costante lo sforzo $\sigma = \sigma_0$

Modelli viscoelastici

Modello di Kelvin-Voigt: solido viscoelastico



E' un esperimento di creep, la deformazione non è immediata e il recupero può essere totale ma non immediato

Modelli viscoelastici

Modello di Kelvin-Voigt: solido viscoelastico

$\sigma = E\varepsilon$

$\sigma = \eta(d\varepsilon/dt)$

$\sigma = \sigma_H + \sigma_N$

$\sigma = E\varepsilon + \eta(d\varepsilon/dt)$

per $t_0 < t < t_1$ lo sforzo è σ_0 costante

$\varepsilon(t) = (\sigma_0 / E)(1 - \exp(-(t/\lambda))$ dove $\lambda = \eta/E$ è detto tempo di ritardo

a t_1, raggiunta ε_1, si rilascia lo sforzo $\sigma = 0$

$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 \exp(-(t - t_1)/\lambda)$

In un tempo sufficientemente lungo, in assenza di dissipazioni, la deformazione può venite totalmente recuperata (solido elastico)

Esperimento di Creep