Trasformata di Fourier Discreta (TFD)

La Trasformata di Fourier Discreta (TFD) è l'analogo t.d. della serie di Fourier. Essa permette di rappresentare i segnali periodici t.d. tramite una combinazione lineare di esponenziali immaginari puri in relazione armonica.

Osserviamo che un segnale t.d. periodico di periodo N è completamente caratterizzato dai valori assunti in un periodo

Consideriamo quindi l'applicazione f che associa il segnale t.d. periodico di periodo N x il vettore $\underline{x}$:

$$f : x \longrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad \text{appartenente a } \mathbb{C}^N$$

È evidente come f sia invertibile e lineare: è quindi un isomorfismo tra lo spazio dei segnali t.d. N-periodici e lo spazio $\mathbb{C}^N$

Ciò permette di definire il prodotto scalare tra due segnali N-periodici x e y come il prodotto scalare tra i corrispondenti vettori $f(x)$ e $f(y)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \overline{y(n)}$$

Esponenziali immaginari puri in relazione armonica t.d.

Sia $N \in \mathbb{N}_0$. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ definiamo il segnale T.d. φ_k:

$$\varphi_k : n \in \mathbb{Z} \to e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{cioè} \quad \varphi_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

I segnali T.d. $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono detti esponenziali imm. puri in relazione armonica

La pulsazione di φ_k è $\frac{2\pi k}{N}$ e la sua frequenza numerica è $\frac{k}{N} \in \mathbb{Q}$. Allora φ_k è periodico e N è un periodo ma non necessariamente il periodo fondamentale: ciò accade solo se k e N sono co-primi

Proprietà dei φ_k

1) $\forall k \in \mathbb{Z}$, φ_k è periodico di periodo N

2) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k = \varphi_{k+N}$

3) $\forall k, h \in \mathbb{Z}$, $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = N \cdot \delta((k-h) \bmod N)$

4) Posto $\underline{\varphi_k} = [\varphi_k(0) \ \varphi_k(1) \dots \varphi_k(N-1)]^T$ (cioè $\underline{\varphi_k} = f(\varphi_k)$), l'insieme $\{\underline{\varphi_k}\}_{k=0\dots N-1}$ è una base ortogonale di $\mathbb{C}^N$

DIM.

1) $\varphi_k(n+N) = e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\, e^{j2\pi k} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \varphi_k(n)$

2) $\varphi_{k+N}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\, e^{j2\pi n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \varphi_k(n)$

Ne segue che l'insieme $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$ contiene tutti gli esp. imm. p. in rel. arm., perché tutti gli altri hanno un equivalente all'interno di tale insieme

3) $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \varphi_h^* \varphi_k$ dove l'asterisco indica il trasposto coniugato.

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(n)\, \overline{\varphi_h(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}hn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\exp\left[j\frac{(k-h)}{N} \cdot 2\pi \right] \right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} z^n$$

avendo posto $z = e^{j\left(\frac{k-h}{N}\right)2\pi}$

Ora, se $z=1$ tale somma da N

Se invece $z \neq 1$ la somma da $\frac{z^N-1}{z-1}$

Ma $z^N = e^{j(k-h)\cdot 2\pi} = 1 \Rightarrow \frac{z^N-1}{z-1} = 0$

Quindi $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \begin{cases} N & \text{se } z=1 \\ 0 & \text{se } z \neq 1 \end{cases}$

Ma $z = e^{j\frac{2\pi}{N}(k-h)} = 1 \iff \frac{2\pi}{N}\cdot(k-h)$ = multiplo intero di 2π

cioè se e solo se $\frac{k-h}{N}$ è intero cioè $\exists m : k-h = mN$

Si dice anche $k \bmod N = h$ oppure $(k-h) \bmod N = 0$

Quindi effettivamente $\langle \varphi_k , \varphi_h \rangle = N\,\delta[(k-h) \bmod N]$

Ma siccome non è rilevante prendere h e k al di fuori di $\{0,1,\dots N-1\}$, possiamo anche dire che

$$\forall h, k \in \{0,1,\dots N-1\}, \quad \langle \varphi_k , \varphi_h \rangle = N\delta_{k-h}$$

4) Ricordando che $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_h \rangle$, dal punto 3 segue immediatamente la Tesi

Trasformata di Fourier Discreta (TFD)

La TFD corrisponde alla proiezione ortogonale degli elementi di $\mathbb{C}^N$ nella base $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$

Ciò si può anche esprimere direttamente in Termini di segnali periodici

Introduciamo ora le formule di analisi e sintesi

Come per il caso t.c., anche per il caso t.d.

Tali formule si possono interpretare nel caso di segnali a supporto finito (supporto $0 \dots N-1$) o segnali periodici, visto che esiste un isomorfismo tra i due.

Formula di analisi

$$\forall k \in \{0, 1, \dots N-1\} \qquad X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k n} \qquad (1)$$

Formula di sintesi

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \qquad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k n} \qquad (2)$$

La (1) è la definizione di Trasformata di Fourier Discreta (TFD). La (2) è la "trasformata inversa" e bisogna dimostrarla. Tale dimostrazione è basata sul fatto che

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{j \frac{2\pi}{N}(n-m)} \right]^k = N \cdot \delta(n-m) \qquad \forall n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

- Dimostriamo quindi che, data la definizione (1) di TFD, vale la formula di sintesi, o TFD inversa.

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)k} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, \delta(n-m) = x(n)$$

C.V.D.

- È facile verificare che i coefficienti $X(k)$ sono la proiezione ortogonale di $\underline{x} = f(x)$ su $\underline{\varphi}_k = f(\varphi_k)$

$$\frac{\langle \underline{x}, \underline{\varphi}_k \rangle}{\langle \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k \rangle} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{N} = X(k) \qquad \text{C.V.D.}$$

- Quindi la TFD può essere vista come un cambiamento di base in $\mathbb{C}^N$. Come tale, posto $\underline{X} = f(X)$ deve esistere una matrice $\underline{\underline{M}}$ tale che

$$\underline{X} = \underline{\underline{M}}\, \underline{x} \qquad e \qquad \underline{x} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{X}$$

Dalla formula di analisi segue che $\underline{\underline{M}}$ è una matrice la cui prima riga è $\frac{1}{N}\underline{\varphi}_0^*$, la seconda è $\frac{1}{N}\underline{\varphi}_1^*$ ... e l'ultima (N-esima) è $\frac{1}{N}\underline{\varphi}_{N-1}^*$

(ricordiamo che $\underline{v}^*$ è il trasposto coniugato del vettore $\underline{v}$

Quindi l'elemento in posizione riga k colonna n è

$$\frac{1}{N}\overline{\varphi}_{k-1}(n-1) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1)} = (\underline{\underline{M}})_{k,n}$$

che è evidentemente uguale all'elemento nella riga n e colonna k. Quindi $\underline{\underline{M}}$ è simmetrica: $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T$

Analogamente, l'elemento in posizione k, n della matrice inversa $\underline{\underline{M}}^{-1}$ è

$$(\underline{\underline{M}}^{-1})_{k,n} = \varphi_{k-1}(n-1) = e^{j\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1)} = N\cdot\overline{(\underline{\underline{M}})}_{k,n}$$

Allora $\underline{\underline{M}}^{-1} = N \cdot \overline{\underline{\underline{M}}}$

TFD su segnali periodici

Abbiamo definito la TFD su "segnali finiti", cioè definiti su $\{0, .. N-1\}$

Sia ora x un segnale periodico. La formula di analisi

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

ha ancora senso, anche per ogni k intero.

Il segnale X è un segnale t. d. periodico di periodo N

essendo somma di N segnali periodici di periodo N.

Inoltre la formula di sintesi:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

è stato dimostrato per $n \in \{0, .. N-1\}$; Tuttavia, il termine di destra è periodico su n di periodo N; quindi effettivamente la formula di sintesi ricostruisce $x(n)$ per ogni n intero.

<u>In conclusione</u>

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Le formule di analisi e sintesi valgono sia per <u>segnali periodici</u>, sia per segnali finiti su $\{0, .. N-1\}$

Esse possono essere viste come cambiamenti di base in $\mathbb{C}^N$ e come tali possono essere interpretate ed implementate come prodotti matriciali:

$$\underline{X} = \underline{\underline{M}}\,\underline{x} \qquad \underline{x} = N\,\underline{\underline{\bar{M}}}\,\underline{X} \qquad \left(\underline{\underline{M}}\right)_{n,k} = \frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1)}$$

Convoluzione circolare

Introduciamo la convoluzione circolare, o convoluzione periodica di periodo N

Segnali periodici

Se x e y sono segnali periodici di periodo N, definiamo un nuovo segnale z, indicato con $z = x *_N y$ il cui campione n vale:

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(n-m)$$

z è periodico : $z(n+N) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(n+N-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(n-m) = z(n)$

Segnali finiti

Vista la corrispondenza tra segnali periodici e segnali finiti, cioè definiti solo per $n \in \{0, \dots N-1\}$, possiamo definire la convoluzione periodica anche per segnali finiti:

- da x, y passiamo alla loro versione periodizzata con periodo N, siano $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$
- poi definiamo $\tilde{z} = \tilde{x} *_N \tilde{y}$, periodico
- Infine $z = x *_N y$ è definito come la restrizione di $\tilde{z}$ al periodo $\{0, \dots N-1\}$

In formule

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \tilde{x}(n) = x(n \bmod N)$

$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{y}(n) = y(n \bmod N)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{z}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\, \tilde{y}(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n)\, y[(n-m) \bmod N]$$

$$\forall n \in \{0, \dots N-1\}, \quad z(n) = \tilde{z}(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(n)\, y[(n-m) \bmod N] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(m)\, \tilde{y}(n-m)$$

Posto $\hat{x}(n) = \begin{cases} x(n) & \text{se } n \in \{0 \dots N-1\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

la convoluzione circolare produce un segnale che, $\forall n \in \{0, \dots N-1\}$ coincide con la convoluzione ordinaria dei segnali $\hat{x}$ (x esteso con zeri al di fuori di $0..N-1$) e $\tilde{y}$, replica periodica di periodo N di y

$$\forall n \in \{0, \dots N-1\} \quad x *_N y\,(n) = \hat{x} * \tilde{y}\,(n)$$

Proprietà TFD

Nel seguito indicheremo con x un segnale periodico di periodo N, o equivalentemente, un segnale finito su $\{0, \dots N-1\}$ e con X la sua TDF ovvero il segnale periodico $X(k)$ o la sua restrizione a $\{0, \dots N-1\}$

Per brevità, tutto ciò sarà indicato con: $x \Rightarrow X$

1) Coniugio se $x \Rightarrow X$, $\bar{x} \Rightarrow \overline{R(X)}$

Basta applicare la formula di analisi a $\bar{x}$: se $\bar{x} \Rightarrow X_1$, allora

$$X_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x(n)}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x(n)}\, \overline{e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n}} = \overline{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n}} = \overline{X(-k)}$$

Ne segue che se x è reale X ha la simmetria hermitiana (come nel caso t.c.)

2) Ribaltamento se $x \Rightarrow X$, $R[x] \Rightarrow R[X]$

DIM. (opzionale)

Chiamiamo X_1 la TFD di $R[x]$, si ha: posto $m = N-n$

$$X_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(-n)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} x(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-m)}$$

ma $e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kN} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)m} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(-m)}$

$$X_1(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} x(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)m} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)m} = X(-k)$$

Infatti $x(N)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)\cdot N} = x(0)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)0}$ per periodicità C.V.D.

3. <u>Ritardo</u> $\quad \mathcal{U}_m[x] \Rightarrow X(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = X(k)\,\varphi_{-m}(k)$

Dim detto X_1 la TFD di $x(n-m)$, si ha:

$$N\cdot X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

posto $l = n-m$ si ha $n = l+m$

$$= \left(\sum_{l=-m}^{N-1-m} x(l)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

ma la somma può essere fatta su di un qualsiasi periodo

$$= \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}\right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k(-m)} = N\cdot X(k)\,\varphi_{-m}(k) \quad \text{CVD}$$

4. <u>Modulazione</u> $\quad x\cdot\varphi_m \Rightarrow \mathcal{U}_m[X]$

Detto X_1 la TFD di $x\cdot\varphi_m$, si ha

$$N\cdot X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{j\frac{2\pi}{N}km} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = N\cdot X(n-m) \quad \text{C.V.D}$$

Quindi ritardo e modulazione si scambiano i ruoli nel dominio del tempo e della frequenza (operazioni "duali")

5) <u>Prodotto</u> $x \cdot y \Rightarrow X *_N Y$

Sia $z(n) = x(n) \cdot y(n)$, periodico anch'esso di periodo N. Si ha:

$$\therefore Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, y(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{m=0}^{N-1} Y(m) e^{j\frac{2\pi}{N}mn} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} Y(m) \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \sum_{m=0}^{N-1} Y(m) X(k-m) \qquad \text{CVD}$$

6) Convoluzione circolare $x *_N y \Rightarrow N \cdot X \cdot Y$

Sia $z(n) = x *_N y\ (n)$; allora

$$Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(n-m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}km} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y(n-m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

Ora $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} y(n-m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \sum_{l=-m}^{N-1-m} y(l)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} y(l)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} = N\, Y(k)$$

Quindi $Z(k) = X(k) \cdot N \cdot Y(k)$ CVD

Quindi prodotto e convoluzione periodica sono <u>duali</u>

7) Parseval: $\|x\|^2 = N \cdot \|X\|^2$ (7.1)

$\langle x, y \rangle = N \langle X, Y \rangle$ (7.2)

Dimostriamo la (7.2) che include la (7.1) come caso particolare. Ricordiamo che il prodotto scalare tra i segnali N-periodici x e y è definito come il prodotto scalare tra i vettori $\underline{x} = f(x)$ e $\underline{y} = f(y)$ costruiti con i campioni del segnale in $\{0 \dots N-1\}$. Analogamente la norma di x è la norma di $\underline{x}$. Allora si ha:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\bar{y}(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{Y}(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X(k)\,\bar{Y}(m) \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}\right]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X(k)\,\bar{Y}(m)\, N\,\delta(k-m)$$

$$= N \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,\bar{Y}(k) = N \langle X, Y \rangle$$ C.V.D.

8) Inversione e ribaltamento: $X(n) \Rightarrow \frac{1}{N} R[x](k)$

Applichiamo la formula di sintesi a $\frac{1}{N} x(-n)$

$$\frac{1}{N} x(-n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$: è proprio la formula di analisi applicata a $X(\cdot)$

9) Sistema LTI Td. in regime periodico

Sia L un LTI stabile Td. con RF $\hat{h}(\omega)$

Sia x un segnale N-periodico e $y = L[x]$

Sappiamo che y è periodico.

Mostriamo che la sua TFD è $Y(k) = \hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \cdot X(k)$

DIM.

Applichiamo la formula di sintesi a x:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \iff x = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k$$

Allora

$$y = L[x] = L\left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi_k\right] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) L[\varphi_k]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \varphi_k$$

Infatti $\varphi_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ è un esp. imm. puro a pulsazione $\frac{2\pi}{N}k$

quindi $L[\varphi_k] = \hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\varphi_k$

In conclusione, la TDF di y è data, $\forall k \in \{0, .., N-1\}$, da

$$\hat{h}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) X(k)$$

Esempio di calcolo della convoluzione circolare

Dati i segnali finiti x e y, calcoliamo la conv. circolare:

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,\tilde{y}(n-m)$$

Converrà scrivere $x(m)$ e poi i vari

$\tilde{y}(-m)$, $\tilde{y}(1-m)$ ... $\tilde{y}(N-1-m)$ che sono

le versioni ribaltate e traslate di y periodizzato

Esempio $x = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 1]$ $\quad y = [1 \quad -1 \quad 2, 0]$ $\quad N=4$

$\tilde{y}$: 1 -1 2 0 $\boxed{1}$ -1 2 0 1 -1 2 0

	$x(m)$	1	2	3	1	
$n=0$	$\tilde{y}(-m)$	1	0	2	-1	$z(0) = 1+0+6-1 = 6$
$n=1$	$\tilde{y}(1-m)$	-1	1	0	2	$z(1) = -1+2+0+2 = 3$
$n=2$	$\tilde{y}(2-m)$	2	-1	1	0	$z(2) = 2-2+3+0 = 3$
$n=3$	$\tilde{y}(3-m)$	0	2	-1	1	$z(3) = 0+4-3+1 = 2$

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad 1] *_N [1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] = [6 \quad 3 \quad 3 \quad 2]$$

Esempi di utilizzo della TFD

- Equalizzazione segnali audio
- Analisi di audio e immagini, esempio Shazam
- Compressione audio e immagini (e video)
- Telecomunicazioni: sistemi di modulazione OFDM (5G, 4G, WiFi)
- Analisi dati di varia natura: biomedicali (TAC, EEG, ECG...) astronomici, metereologici, radar/sonar, ecc.

Algoritmo FFT (fast Fourier Transform)

È un'implementazione veloce della Trasformata di Fourier discreta. Invece delle N^2 operazioni richieste dalla formula di analisi, ne sono necessarie solo $N \log N$

È talmente importante che:

- fin dagli anni '90 del 900 la FFT è integrata in chipset commerciali
- con l'avvento dei sistemi OFDM (utilizzati in WiFi, 4G, 5G, DVB, DAB, PLC, xDSL, ecc) i chipset FFT sono ubiquitari
- virtualmente in tutti i linguaggi di programmazione esistono librerie che implementano la TFD tramite FFT