SERIE DI FOURIER

La serie di Fourier (SdF) è uno strumento matematico che permette di rappresentare, sotto ipotesi piuttosto larghe, i segnali periodici come somme eventualmente infinite, di sinusoidi in forma canonica o di esponenziali immaginari puri in forma canonica

Perché è interessante?

- La SdF è uno strumento di analisi: permette di capire "quali frequenze sono presenti in un segnale" e cioè con quali ampiezze le differenti sinusoidi contribuiscono a creare il segnale stesso
- Siccome è facile determinare l'uscita di un LTI ad un esponenziale imm. puro, diventerà facile anche determinare l'uscita di un LTI per un generico segnale periodico
- Siccome la SdF è associata ad un segnale t.d. (la successione dei coefficienti) ciò significa che un segnale t.c. periodico può essere perfettamente rappresentato tramite un segnale t.d.

Gli spazi di funzioni su $(-T/2, T/2)$

La serie di Fourier permette di rappresentare i segnali appartenenti ad opportuni spazi di funzioni, tramite combinazione lineare di opportuni segnali di base, che vedremo essere gli esponenziali comm. puri

Gli spazi di funzione d'interesse sono quelli dei segnali

$L^\infty(-T/2, T/2)$, $L^2(-T/2, T/2)$, $L^1(-T/2, T/2)$ per un $T>0$ opportuno

cioè segnali definiti in $(-T/2, T/2)$ e rispettivamente

limitati, a energia finita, assolutamente integrabili.
Vedremo poi il legame con i segnali periodici di periodo T.
Ricordiamo alcune proprietà di tali spazi

i) $L^\infty(-T/2, T/2) = \{ x : (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \to \mathbb{C}$ tale che $\exists M_x > 0 : \forall t \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$,

$$|x(t)| < M_x \}$$

E' uno spazio vettoriale e il funzionale seguente:

$$\|x\|_\infty = \sup \{ |x(t)| \}_{t \in (-T/2, T/2)}$$

è una norma di tale spazio

2) $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) = \left\{ x:(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) \to \mathbb{C} : \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < +\infty \right\}$

In tale spazio abbiamo definito il prodotto scalare:

se $x, y \in L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, $\quad \langle x, y \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\overline{y(t)}\, dt$

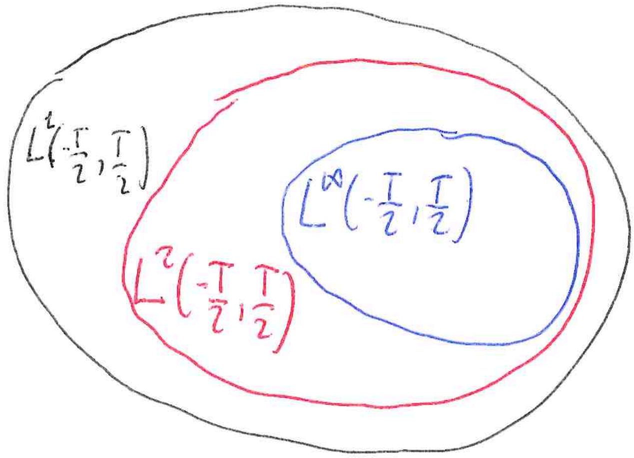
Il prodotto scalare induce la norma $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ è uno spazio Euclideo, normato, di dimensione infinita e <u>completo</u>

3) $L^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) = \left\{ x:(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) \to \mathbb{C} : \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < +\infty \right\}$

È uno spazio vettoriale nel quale il funzionale

$\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt$ è una norma



<u>Relazioni d'inclusione</u>

$L^\infty(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) \subset L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) \subset L^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

<u>DIM</u>

Se $x \in L^\infty(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, esiste $M>0$ tale che $|x(t)| < M \quad \forall t \in (-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \int_{-T/2}^{T/2} M^2 dt = M^2 T < +\infty \Rightarrow x \in L^2(-T/2, T/2)$

Quindi $L^\infty(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) \subset L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

Se invece $x \in L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, sia $I = \{t \in (-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) : |x(t)| < 1\}$

e sia $J = \{t \in (-\frac{T}{2},\frac{T}{2}) : |x(t)| \geq 1\} \Rightarrow I \cap J = \phi$ e $I \cup J = (\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

Allora $$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|dt = \int_I |x(t)|dt + \int_J |x(t)|dt$$

Allora $$\int_I |x(t)|dt < \int_I 1 \cdot dt = \text{misura}(I) \leq T < +\infty$$

Mentre, $\forall t \in J$, $|x(t)| \leq |x(t)|^2$ e quindi

$$\int_J |x(t)|dt \leq \int_J |x(t)|^2 dt \leq \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \|x\|_2^2 < +\infty$$

Quindi $$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|dt \leq T + \|x\|_2^2 < +\infty$$

Esponenziali in relazione armonica

Consideriamo un valore fissato di $T \in \mathbb{R}_0^+$

Tale valore sarà il periodo delle funzioni periodiche

Ricordiamo anche $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione e $f_0 = \frac{1}{T}$ frequenza

Consideriamo ora la seguente famiglia di segnali, indicizzata da un intero k:

$\forall k \in \mathbb{Z}$, sia $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ segnale definito su $\mathbb{R}$

Abbiamo dunque $\varphi_k(t) = e^{j2\pi f_0 kt} = e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$

e anche $\varphi_k(t) = [\varphi_1(t)]^k$

Il segnale φ_k è periodico di periodo $T/|k|$ (per $k \neq 0$)

Infatti: $\varphi_k\left(t + \frac{T}{|k|}\right) = e^{j\frac{2\pi}{T}k\left(t+\frac{T}{|k|}\right)} = e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \cdot e^{j2\pi \cdot \mathrm{sgn}(k)}$

$= e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \varphi_k(t)$

Possiamo concludere che T è periodo comune a tutti i segnali φ_k, incluso $\varphi_0(t) = 1$ (costante e quindi periodico con periodo qualsiasi)

Inoltre, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\varphi_k(t)| = 1 \Rightarrow \varphi_k \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ma

$\varphi_k \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e $\varphi_k \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Se invece consideriamo la restrizione di φ_k a $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$,

tale segnale è appartenente a $\mathcal{L}^\infty\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ e quindi

anche a $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$ su tale intervallo.

Nel seguito useremo lo stesso simbolo φ_k per designare tanto il segnale definito su $\mathbb{R}$ quanto la sua restrizione a $(-T/2, T/2)$. Dal contesto sarà chiaro a quale versione ci riferiamo

L'insieme dei segnali $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è detto insieme degli <u>esponenziali in relazione armonica</u> (tanto su $\mathbb{R}$ quanto su $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$)
(E.R.A.)

Mostriamo ora che gli E.R.A. ristretti a $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ formano una base di $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$

In realtà ci limiteremo a mostrare che i φ_k sono ortogonali tra loro:

LEMMA $\forall h,k\in\mathbb{Z}$, in $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ $\langle\varphi_k,\varphi_h\rangle = T\,\delta_{h-k}$

dove $\delta_{h-k} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è la delta <u>discreta</u> (di Kronecker)

<u>DIM.</u> $$\langle\varphi_k,\varphi_h\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_k(t)\overline{\varphi_h(t)}\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t}\,e^{-jh\omega_0 t}\,dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-h)\omega_0 t}\,dt$$

Ora, se $k=h$, l'integrando vale 1 e quindi il prodotto scalare vale $\int_{-T/2}^{T/2} dt = T$

Se invece $k \neq h$, si ha:

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-h)\omega_0 t} dt = \left[\frac{e^{j(k-h)\omega_0 t}}{j(k-h)\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{1}{j(k-h)\omega_0} \left(e^{j(k-h)\omega_0 \frac{T}{2}} - e^{-j(k-h)\omega_0 T/2} \right) =$$

$$= \frac{2}{(k-h)\omega_0} \sin\left((k-h)\omega_0 \frac{T}{2}\right) = \frac{2}{(k-h)\omega_0} \cdot \sin\left((k-h)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{(k-h)\omega_0} \sin((k-h)\pi) = 0$$ CVD

Abbiamo mostrato che l'insieme $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è formato da infiniti elementi ortogonali dello spazio $L^2(-T/2, T/2)$

Si può dimostrare che esso è effettivamente una base di tale spazio. Vale quindi il seguente

Teorema

TEOREMA DI RIESZ-FISCHER

Sia $T>0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e $x \in \mathcal{L}^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Definiamo, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\quad a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

FORMULA DI ANALISI

Sia, $\forall M \in \mathbb{Z}$, $x_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk\omega_0 t}$

Allora $\quad \|x - x_M\| \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$

SENZA DIMOSTRAZIONE

<u>Discussione</u> Il Teorema di R.-F. definisce la serie di Fourier per segnali a energia finita su $(-T/2, T/2)$

Tale serie è: $\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ FORMULA DI SINTESI

Dove i coefficienti a_k, detti coefficienti di Fourier di x sono definiti dalla formula di analisi.

Il Teorema assicura che, se $x \in \mathcal{L}^2(-T/2, T/2)$, gli a_k esistono finiti e la serie di Fourier converge in norma a x

ciò vuol dire che $x(t)$ coincide con la somma della serie "quasi ovunque", cioè eccetto un insieme di punti di misura nulla. In altre parole, il segnale "di errore" quadratico, cioè $\left(x(t) - \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}\right)^2$ ha un'area nulla

È facile verificare che i coefficienti a_k sono la proiezione ortogonale di x sui segnali di base φ_k:

$$\frac{\langle x, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = a_k$$

Riassumendo:

Se $x \in \mathcal{L}^2(-T/2, T/2)$ allora

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

La formula di analisi permette di calcolare i coefficienti.
La formula di sintesi permette di ricostruire il segnale a meno di un errore che però ha energia nulla

Useremo la notazione $\boxed{x \to a_k}$ per dire che a_k sono i c.d.F. di x

Serie di Fourier per segnali periodici

Le formule di analisi e sintesi si estendono facilmente a segnali periodici di periodo T.

Sia x periodico di periodo T e con energia finita su $(-T/2, T/2)$.
Allora possiamo applicare il Teorema R.-F. alla restrizione di x su $(-T/2, T/2)$.

La formula di analisi si può riscrivere identicamente

$$a_k = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\omega_0 t k}\, dt$$

perché su $(-T/2, T/2)$ x coincide con la sua restrizione

La formula di analisi ci dice che

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{q.o. su } (-T/2, T/2)$$

Ma il termine di destra della formula di sintesi è definito su tutto $\mathbb{R}$, dove è periodico di periodo T, in quanto somma di funzioni periodiche di periodo T.
Anche il termine di sinistra è periodico di periodo T.

Allora anche la formula di sintesi vale quasi ovunque su $\mathbb{R}$ per il segnale periodico x

Identità di Parseval

Se $x \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ e $x \Rightarrow a_k$ allora

$a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e $\|a\|_2^2 = \frac{1}{T}\|x\|_2^2$ Identità di Parseval

Senza DIM.

Notiamo che l'identità di Parseval si può riscrivere esplicitamente nel modo seguente:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt$$

Estensione della S.d.F. a segnali $L^1(-T/2\,;\,T/2)$

Le formule di analisi e sintesi si possono estendere ad un sottoinsieme dei segnali L^1 con convergenza puntuale grazie al seguente Teorema.

Teorema di DIRICHLET

Se il segnale x soddisfa le ipotesi seguenti:

1) $x \in \mathcal{L}^1(-T/2, T/2)$

2) In $(-T/2, T/2)$ x ha un numero finito di massimi e minimi locali ("numero finito di oscillazioni")

3) In $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ x è continuo tranne al più per un numero finito di punti in cui ci sono discontinuità di salto

Allora, posto $$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt,$$

si ha che:

- $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad |a_k| < +\infty$
- $\forall t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \begin{cases} x(t) & \text{se } x \text{ continuo in } t \\ \dfrac{x(t^-)+x(t^+)}{2} & \text{altrimenti} \end{cases}$

Senza DIM.

È possibile individuare segnali di $\mathcal{L}^1$ che non soddisfano le condizioni 2) o 3) ma sono casi di scarso interesse pratico.

In pratica, per tutti i segnali d'interesse di $\mathcal{L}^1$ vale la convergenza puntuale dove il segnale è continuo e al punto medio tra i limiti sinistro e destro nei punti di salto.

L'estensione ai segnali periodici è immediata, come nel caso $\mathcal{L}^2$

Serie di Fourier dell'onda quadra

Sia $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T/2}\right)$

a) Tracciare il grafico di x e calcolarne il valor medio

b) Verificare che $\tilde{x} \in L^2 \cap L^1(-T/2, T/2)$ dove $\tilde{x}$ è la restrizione di x a $(-T/2, T/2)$

c) Calcolare i coefficienti di Fourier di x su $(-T/2, T/2)$

d) Discutere la convergenza della Serie di Fourier

---

a) osserviamo che, posto $y(t) = \mathrm{rect}(t/T/2)$ impulso rettangolare di durata $T/2$, possiamo scrivere

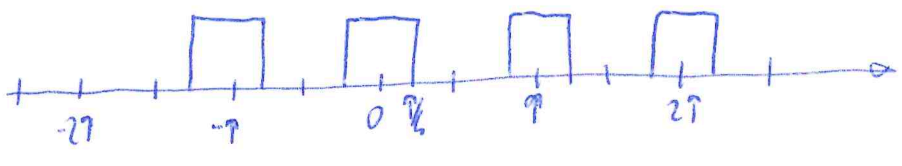
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T/2}\right) = y(t-kT)$$

e quindi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(t-kT)$$

che è la replica periodica di periodo T del segnale y.

Cioè, ogni T abbiamo un impulso di durata $T/2$



Allora x è un segnale periodico di periodo T. Il valor medio si può calcolare su di un periodo

$$M[x] = M_{(-T/2, T/2)}[x] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} dt = 1/2$$

b) La restrizione di x a $(-T/2, T/2)$ è limitata e quindi è anche L^2 e L^1

c) Usiamo la formula di analisi, con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

Osserviamo che, $\forall t \in (-T/2, T/2)$, $x(t) = \mathrm{rect}(t/(T/2))$ quindi

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

dove abbiamo usato il trucco della funzione indicatrice:
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right)$ è l'indicatrice di $\left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right)$

Ora, se $k=0$ abbiamo: $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} dt = 1/2$

$$\forall k \neq 0, \quad a_k = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{-jk\frac{2\pi}{T}}\right]_{t=-T/4}^{t=T/4} = \frac{1}{k\pi}\,\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j} =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

L'espressione di a_k si può ulteriormente semplificare:
Se k è pari (non nullo) a_k è il seno in un multiplo intero di π, quindi vale $\emptyset$.
Se k è dispari, scriviamo $k = 2m+1$

Si ha $\quad \sin(k\pi) = \sin((2m+1)\pi/2) =$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(m\pi) = (-1)^m$$

In sintesi

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{se} \quad k = 0 \\ 0 & \text{se} \quad k = 2m, \; m \neq 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{se} \quad k = 2m+1 \end{cases}$$

Quindi $\quad x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} e^{j(2m+1)\frac{2\pi}{T}t}$

d) La convergenza è puntuale, perché x rispetta le ipotesi del Teorema di Dirichlet. (È anche convergente q.o., perché $x \in L^2(-\frac{T}{2}, T/2)$) Quindi la SdF converge a x(t) in tutti i punti di continuità. In corrispondenza della discontinuità di salto la SdF converge alla media dei limiti sx e dx, quindi a 1/2

Proprietà dei coeff. di Fourier

Elenchiamo le proprietà dei coeff. di Fourier di un segnale x che soddisfa le ipotesi del Teorema di Riesz-Fischer o di quello di Dirichlet.

Siano a i C.d.F. di x. Scriveremo $x \Rightarrow a$

1) Coniugio: se $x \Rightarrow a$, $\bar{x} \Rightarrow \overline{R(a)}$

Infatti, i coeff. di $\bar{x}(t)$ sono: $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t)}\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t)}\, e^{j(-k)\omega_0 t} dt$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t)\, e^{-j(-k)\omega_0 t}}\, dt = \overline{a_{-k}} \qquad \text{C.V.D.}$$

Allora se x è un segnale reale, i coeff. di x sono uguali a quelli di $\bar{x}$ e quindi $a_k = \overline{a_{-k}}$ (simmetria hermitiana)

2) Ribaltamento se $x \Rightarrow a$, $R(x) \Rightarrow R(a)$

Infatti i coeff di $R(x)$ sono $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau) e^{-j(-k)\omega_0 \tau} d\tau$

(avendo posto $\tau = -t$) $= a_{-k}$

3) Cambio scala: Se $x \Rightarrow a$, e $\alpha > 0$, $S_\alpha(x) \Rightarrow a$

cioè i C.d.F non cambiano

Siano b_k i c.d.F. di $y = S_\alpha(x)$, si ha che y è periodico di periodo T/α: infatti $y(t + \frac{T}{\alpha}) = x(\alpha(t + \frac{T}{\alpha})) = x(\alpha t + T) =$

$= x(\alpha t) = y(t)$

quindi $b_k = \frac{1}{T/\alpha} \int_{-T/2\alpha}^{T/2\alpha} y(t) e^{-jk\frac{2\pi\alpha}{T}t} dt =$ posto $\tau = \alpha t$, $t = \tau/\alpha$, $dt = d\tau/\alpha$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau = a_k$$

Osserviamo la differenza nella formula di sintesi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\frac{2\pi \cdot \alpha}{T}t}$$

4) Traslazione : se $x \Rightarrow a$, $\quad \mathcal{U}_\beta[x] \Rightarrow e^{-jk\omega_0\beta} \cdot a_k$

Infatti i coeff. di $\mathcal{U}_\beta[x]$ sono b_k:

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t-\beta) e^{-jk\omega_0 t} dt =$$ posto $\tau = (t-\beta)$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2-\beta}^{T/2-\beta} x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau+\beta)} d\tau = e^{-jk\omega_0\beta} \int_{-\frac{T}{2}-\beta}^{\frac{T}{2}-\beta} x(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau$$

Ma l'integranda è periodica di periodo T quindi posso calcolare l'integrale su di un qualsiasi periodo:

$$b_k = e^{-jk\omega_0\beta} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = e^{-jk\omega_0\beta} a_k$$

6) Derivazione: se x è derivabile, $x' \Rightarrow jk\omega_0 a_k$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow x'(t) = \sum_k a_k \cdot jk\omega_0 e^{jk\omega_0 t}$$ cvd

7) Simmetria: si dimostrano applicando la def di c.d.F.

Sia $x \Rightarrow a$ allora:

Se x reale, a hermitiana: $a_k = \overline{a_{-k}}$

Se x pari, a pari: $a_k = a_{-k}$

Se x dispari, a dispari: $a_k = -a_{-k}$

Se x reale pari, a reale pari

Se x reale dispari a pur. immaginaria e dispari.

8) Linearità Se $x \Rightarrow a$ e $y \Rightarrow b$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha x + \beta y \Rightarrow \alpha a + \beta b$$

9) Valore in zero $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = x(0)$ se x soddisfa Dirichlet ed è continua in zero

Infatti $x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Big|_{t=0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$

10) Valor medio $m[x] = a_0$

Infatti $m[x] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T} x(t)\, e^{-j \cdot 0 \cdot \omega_0 t}\,dt = a_0$

Forma Trigonometrica della Serie di Fourier

Usando le formule di Eulero, la SdF di un segnale x può scriversi come:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left[\cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t)\right] + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}\left[\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)\right]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + a_{-k})\cos(k\omega_0 t) + j(a_k - a_{-k})\sin(k\omega_0 t)$$

$$\boxed{= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(k\omega_0 t) + \beta_k \sin(k\omega_0 t)}$$

SdF in forma Trigonometrica

dove $\boxed{\alpha_k = a_k + a_{-k}}$ e $\boxed{\beta_k = j(a_k - a_{-k})}$

Caso di segnale reale

Se x è reale, $a_k = \overline{a_{-k}}$

Quindi $a_{-k} = \overline{a_k}$ e allora

$$\alpha_k = a_k + \overline{a_k} = 2\,\mathrm{Re}(a_k) = 2|a_k|\cos(\angle a_k)$$

$$\beta_k = j(a_k - \overline{a_k}) = j\cdot(2j\,\mathrm{Im}(a_k)) = -2\,\mathrm{Im}(a_k) = -2|a_k|\sin(\angle a_k)$$

Allora la SdF in forma Trigonometrica diventa:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cos(\angle a_k) \cos(k\omega_0 t) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \sin(\angle a_k) \sin(k\omega_0 t) =$$

$$\boxed{= a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cos(k\omega_0 t + \angle a_k)}$$

SdF in forma trigonometrica per segnali reali

Esercizio Scrivere la SdF dell'onda quadra in forma trigonometrica

Ricordiamo che $a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k = 2m, \neq 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{se } k = 2m+1 \end{cases}$

Ci interessano allora i valori di k dispari e positivi,

cioè $k = 2m+1$ con $m \geq 0$

Se m pari, $|a_k| = \dfrac{1}{(2m+1)\pi}$, $\angle a_k = 0$

Se m dispari $|a_k| = \dfrac{1}{(2m+1)\pi}$, $\angle a_k = \pi$

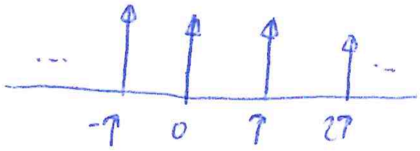
Allora $\cos(k\omega_0 t + \angle a_k) = \begin{cases} \cos((2m+1)\omega_0 t) & m \text{ pari} \\ \cos((2m+1)\omega_0 t + \pi & m \text{ dispari} \end{cases} =$

$= (-1)^m \cos((2m+1)\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \cos[(2m+1)\omega_0 t]$$

Serie di Fourier del Treno d'impulsi

Si consideri il segnale generalizzato



$$p(t) = rep_T[\delta](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

detto Treno d'impulsi di periodo T

Si tratta di un segnale generalizzato periodico, ci chiediamo se ha senso calcolarne la serie di Fourier.

Per prima cosa applichiamo la formula di analisi e troviamo i coefficienti:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_m \delta(t-mT)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}$$

Dalla formula di sintesi avremmo:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\, e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Ma che senso ha questa formula, visto che non converge per $t = nT$?

Come al solito, il senso delle identità che coinvolgono le delta di Dirac si trova considerando gli operatori integrali. Osserviamo infatti che, dato $v \in \mathcal{L}^2(-T/2, T/2)$ e continua in zero,

$$\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, v(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, v(t)\, dt = v(0)$$

Dobbiamo allora verificare che sostituendo $p(t)$ con la sua serie di Fourier, si conservi la proprietà del campionamento:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}\, v(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = v(0)$$

Dove abbiamo sfruttato la proprietà del valore in zero

Osserviamo allora che $p(t)$ e $\frac{1}{T} \sum_k e^{jk\omega_0 t}$ si comportano allo stesso modo quando adoperate nella proprietà del campionamento. In questo senso sono uguali.

Osserviamo infine che, dato il segnale x tale che $rep_T[x]$ converge, si ha:

$$p * x = \left(\sum_k u_k[\delta] \right) * x = \sum_k \left(u_k[\delta] * x \right) = \sum_k u_k[\delta * x]$$

$$= \sum_k u_k[x] = rep_T[x]$$

Convoluzione periodica

Siano v, w periodici di periodo T e tali che la loro restrizione su $(-T/2, T/2)$ sia ad energia finita

Definiamo allora l'operatore di convoluzione periodica tra v e w, indicato con $*_T$

Esso definisce un nuovo segnale z che soddisfa:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} v(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau \quad , \quad o \quad z = v *_T w$$

Si può mostrare che $z(t)$ converge per ogni t ed inoltre anche z è periodico di periodo T:

$$z(t+T) = \int_{-T/2}^{T/2} v(\tau)\, w(t+T-\tau)\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} v(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau = z(t)$$

per la periodicità di w

Relazione tra convoluzione e SdF

Teorema 1 Siano $x, y \in \mathcal{L}^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, $x \Rightarrow a$, $y \Rightarrow b$
e sia $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

Allora
a) $z \in \mathcal{L}^1(-T/2, T/2)$
b) $z \Rightarrow c$, con c_k finito e $c_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m b_{k-m}$

cioè $c = a * b$

<u>Teorema 2</u> Siano $x, y \in \mathcal{L}^1(-T/2, T/2)$ e tali
da soddisfare le ipotesi del Teorema di Dirichlet
Sia $x \Rightarrow a$, $y \Rightarrow b$, $z = x *_T y$ e $z \Rightarrow c$

<u>Allora</u> $\forall k \in \mathbb{Z}$ $c_k = T a_k \cdot b_k$

<u>Osservazione</u> Questa coppia di Teoremi mostra che convoluzione e prodotto si scambiano ruolo quando si passa dal segnale ai suoi cdf o viceversa

Dimostreremo soltanto che, nelle ipotesi del Teorema 2,

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T a_k b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Innanzitutto si può mostrare che nelle ipotesi date z è continua.
Poi si ha:

$$z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 \tau} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0(t-\tau)} d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_k b_m e^{jm\omega_0 t} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 \tau} d\tau$$

Ma $\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 \tau} d\tau = \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = T \delta_{k-m}$ quindi nella somma nell'indice m, il termine generale è non nullo solo se $m = k$. Si ha

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k e^{jk\omega_0 t} \cdot T$$ c.v.d.

Sistemi LTI in regime periodico

Consideriamo un LTI BIBO stabile in regime periodico

Sappiamo già che l'uscita $y = L[x]$ ha lo stesso periodo di x. Valgono i seguenti risultati addizionali:

a) Se $x \in \mathcal{L}^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ allora y è continua

b) Se x soddisfa le ipotesi del Teorema di Dirichlet, allora, posto $x \Rightarrow a$ e $y \Rightarrow b$, si ha:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad b_k = H(k\omega_0) \cdot a_k = H(k \tfrac{2\pi}{T}) a_k$$

e $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ (conv. puntuale)

dove $H(\omega)$ è la RF di L.

c) Se $x \in \mathcal{L}^2(-T/2, T/2)$ allora

$$y \in \mathcal{L}^2(-T/2, T/2)$$

$$\langle y, y \rangle = E_{(-T/2, T/2)}[y] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\, |H(k\omega_0)|^2 |a_k|^2$$

$$\langle x, y \rangle = E_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[x, y] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\, H(k\omega_0)\, |a_k|^2$$

Dimostriamo solo b) Si ha

$$y(t) = L[x](t) = L\Big[\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}\Big] = \sum_k a_k L[e^{jk\omega_0 t}] =$$

$$= \sum_k a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{c.v.d.}$$

Filtri ideali

Un segnale periodico reale può scriversi come:

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k\geq 1} |a_k| \cos(k\omega_0 t + \angle a_k) \quad , \text{con } x \Rightarrow a$$

Se tale segnale è posto all'ingresso di un LTI stabile e reale l'uscita y è tale che: $y \Rightarrow b$ e $b_k = H(k\omega_0) a_k$, per cui

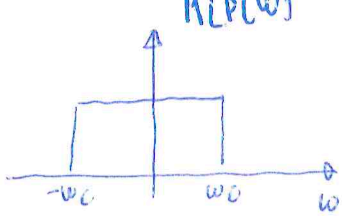
$$y(t) = b_0 + 2\sum_{k\geq 1} |b_k| \cos(k\omega_0 t + \angle b_k) =$$

$$= H(0)\cdot a_0 + 2\sum_{k\geq 1} |H(k\omega_0)|\cdot|a_k| + \cos(k\omega_0 t + \angle a_k + \angle H(k\omega_0))$$

Allora, l'andamento di $|H(\omega)|$ (per $\omega>0$, tanto $|H(\omega)|$ è pari) stabilisce quali armoniche di x vengono attenuate o amplificate nell'uscita y

Per questo gli LTI vengono anche detti filtri

Si definiscono i seguenti filtri ideali



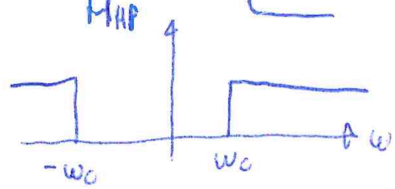
Filtro passa basso ideale

È un LTI stabile con R.F. $H_{LP}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$

Tutte le armoniche con pulsazione $\omega_0 < \omega_c$ si ritrovano nell'uscita con ampiezza invariata

Tutte le armoniche con pulsazione $\omega_0 > \omega_c$ vengono soppresse. ω_c è detta pulsazione di taglio ("cut", da cui la "c")

Filtro passa alto ideale



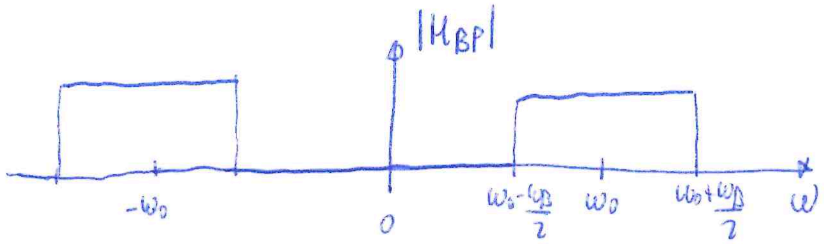
E' un LTI stabile con $H_{HP}(\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$

Ha il comportamento duale rispetto al passa-basso

Filtro passa banda ideale

E' un LTI stabile con $H_{BP}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_B}\right)$

Lascia passare con ampiezza immutata le armoniche la cui pulsazione è



contenuta in un intervallo detto <u>banda passante</u>,

centrato in ω_0 e di ampiezza ω_B: $\left(\omega_0 - \frac{\omega_B}{2}, \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}\right)$

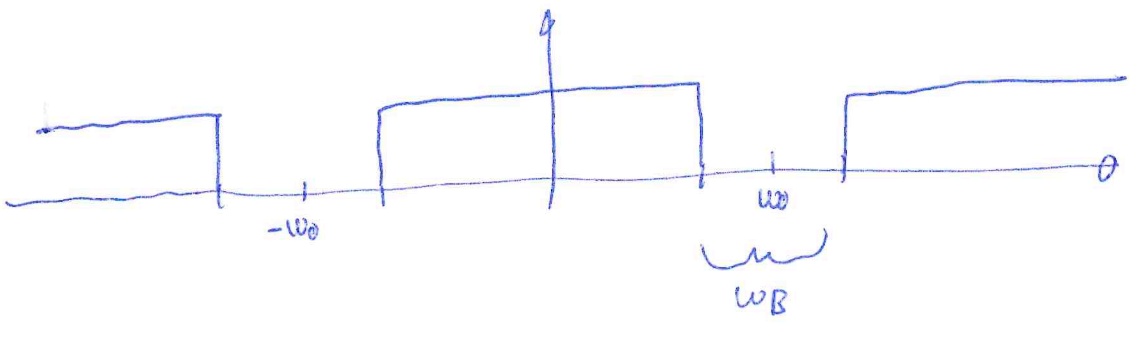
Lascia passare anche le corrispondenti pulsazioni negative.

Sopprime tutte le altre armoniche

Filtro elimina banda ideale

E' un LTI stabile con $H_{RB}(\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_B}\right)$

Ha il comportamento duale rispetto al filtro passa banda



Filtraggio ideale di un segnale periodico reale

Se $x \Rightarrow a$ è filtrato con un filtro ideale,

l'uscita $y \Rightarrow b$ è caratterizzato da:

$$b_k = H(k\omega_0)\cdot a_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k\omega_0 \in B \\ 0 & \text{se } k\omega_0 \notin B \end{cases}$$

dove B è la banda passante del filtro.

Per un LP, $B = (-\omega_c, \omega_c)$

Quindi $k\omega_0 \in B \iff |k\omega_0| < \omega_c \iff \boxed{|k| < \frac{\omega_c}{\omega_0}}$

$$y(t) = a_0 + 2\sum_{\substack{k \geq 1 \\ k < \frac{\omega_c}{\omega_0}}} a_k \cos(k\omega_0 t)$$

Per esempio, posto $M = \lfloor \frac{\omega_c}{\omega_0} \rfloor$, se $x(t)$ è l'onda quadra,
e la filtriamo con un LP ideale,

$$y(t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{M} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \cos\left((2m+1)\omega_0 t\right)$$

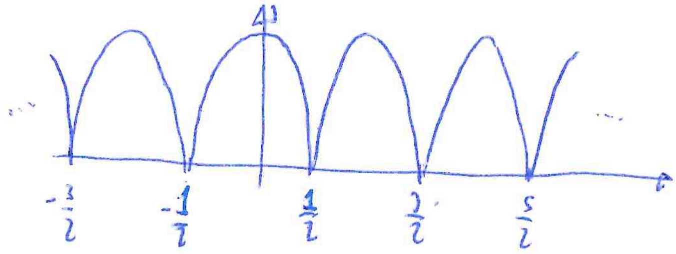
Somma parziale della S.d.F., con fenomeno di Gibbs

Esercizio

Dato $x(t) = |\cos \pi t|$ Trovare il periodo fondamentale T e calcolare i c.d.F.

La funzione $\cos\pi t$ si annulla $\forall t : \pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + k$

Tracciamo il grafico di $x(t)$



Il periodo fondamentale è quindi $T = 1$ quindi $\omega_0 = 2\pi$

Osservando che, $\forall t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $x(t) = \cos\pi t$, i c.d.F. sono:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \cos\pi t\, e^{-jk2\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}\right) e^{-jk2\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi t(k-\frac{1}{2})}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi t(k+\frac{1}{2})}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} f(k-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2} f(k+\tfrac{1}{2})$$

dove $f(\alpha) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi t\alpha}\, dt \overset{\alpha \neq 0}{=} \left[\frac{e^{-j2\pi t\alpha}}{-j2\pi\alpha}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{j\pi\alpha} - e^{-j\pi\alpha}}{2j\cdot\pi\alpha}$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \operatorname{sinc}\alpha$$

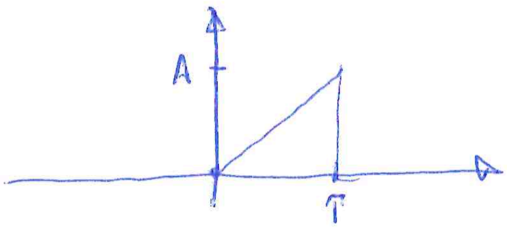
Quindi $a_k = \text{sinc}\left(k+\frac{1}{2}\right) + \text{sinc}\left(k-\frac{1}{2}\right)$

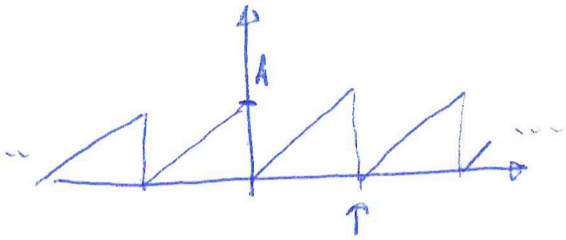
Esercizio

Calcolare i cdF dell'onda "dente di sega":

$x(t) = \text{rep}_T[y](t)$ con $y(t) = \frac{A}{T} t \cdot \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Disegnamo y e poi x.





$y(0)=0$
$y(T)=A$
Tra 0 e T y è lineare, al di fuori è nulla

x è la replica periodica di periodo T di y

Invece di applicare la def., calcoliamo i coeff. b_k di x' e poi applichiamo la regola della derivata

$b_k = jk\omega_0 a_k \Rightarrow \forall k \neq 0 \quad a_k = \frac{1}{jk\omega_0} a_k$

Ora $x'(t) = \frac{A}{T} + -A\,\text{rep}_T[\delta](t)$

Nel calcolo dei b_k possiamo trascurare la costante A/T che influenza solo il valor medio e quindi calcolare solo i c.d.F di $-A\,\text{rep}_T[\delta](t)$: allora $\forall k \neq 0$, $b_k = -A/T$

Infatti: , $rep_T[\delta] \Rightarrow 1/T$

In conclusione, $a_k = -\frac{A}{T} \cdot \frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}} = j\frac{A}{2\pi k} \quad \forall k \neq 0$

mentre $a_0 = M[x] = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t\, dt = \frac{A}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{A}{2}$

Vale la pena di sottolineare quanto segue:

Se $x \Rightarrow a$, e $y = x + x_0 \Rightarrow b$, x_0 = costante,

allora $b_0 = a_0 + x_0$ e $b_k = a_k \ \forall k \neq 0$

Dim. basta osservare che $y = x + z$ dove z = costante

e i coeff. di Fourier di z sono: $z \Rightarrow c$.

Ma $z(t) = x_0$ è già una serie di Fourier

$$z(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{con} \quad c_k = \begin{cases} x_0 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siccome $y = x + z$, $b = a + c$ e $b_k = \begin{cases} a_0 + c_0 = a_0 + x_0 & \text{per } k=0 \\ a_k & \text{altrimenti} \end{cases}$