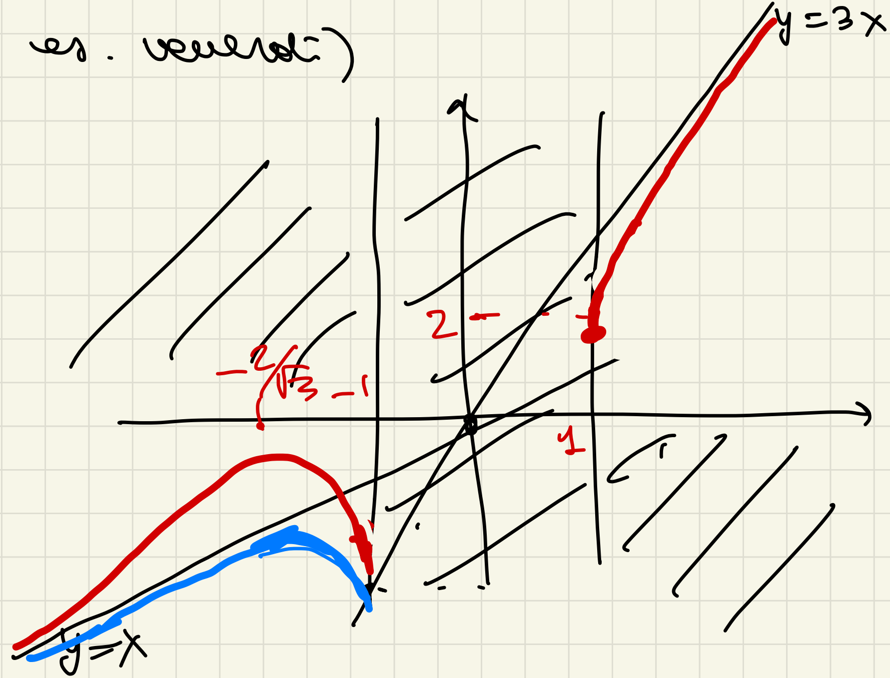
Es (continuazione es. venerdì)

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{x^2-1}} + 2x$$



$$\underbrace{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

cerco as. obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2\right]}{\cancel{x}} = 3 = m$$

$y = 3x + 0$

$y = 3x$

è

AS. OBLIQUO a $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+2x-3x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0 = q$$

-1

$\to +\infty$

Cerco as. obliquo a $-\infty$.

$$\sqrt{x^2}=|x|=-x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left[-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2\right]}{\cancel{x}}$$

$$=-1+2=\underbrace{1=m}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+\underbrace{2x-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=$$

$+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}-x}=0=q$$

$\to +\infty+\infty=+\infty$

$$\boxed{\begin{array}{c}y=x\\ \text{AS. OBLIQUO}\\ \text{a } -\infty\end{array}}$$

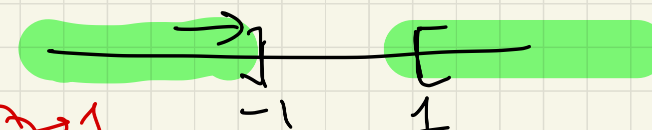
$$f(x) = \sqrt{\underbrace{x^2-1}} + \underbrace{2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} \cdot \cancel{2}x + 2 \cdot 1$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = $$
$$= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} =$$
$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 2$$

ben def $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



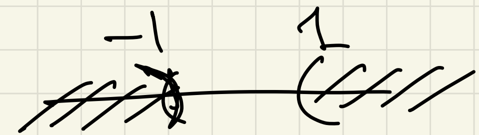
calcolo $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to 0^+}} + 2 = +\infty$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\overbrace{x}^{-1}}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to 0^+}} + 2 = \frac{-1}{0^+} + 2 = -\infty$$

in $x=1$, $x=-1$ ho pendenza verticale.

Studio segno $f'(x)$

$$f'(x) \geq 0 \qquad \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}_{+} + \underbrace{2}_{+} \geq 0$$



$\boxed{\text{se } x \geq 1}$ $\qquad \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0 \longrightarrow \boxed{f'(x) > 0} \Rightarrow \boxed{f \text{ è strett crescente}}$

se $x < 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \overset{?}{\geq} 0$$

$$\frac{x + 2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$$

$\sqrt{x^2-1} > 0$

$$x + 2\sqrt{x^2-1} \geq 0$$

$$\underbrace{\left(2\sqrt{x^2-1}\right)}_{+}^2 \geq \underbrace{(-x)}_{+}^2$$

$$4(x^2-1) \geq x^2$$

$$4x^2 - 4 \geq x^2$$

$$\boxed{3x^2 - 4 \geq 0}$$

$$3x^2-4\geq 0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x^2=\frac{4}{3}$$

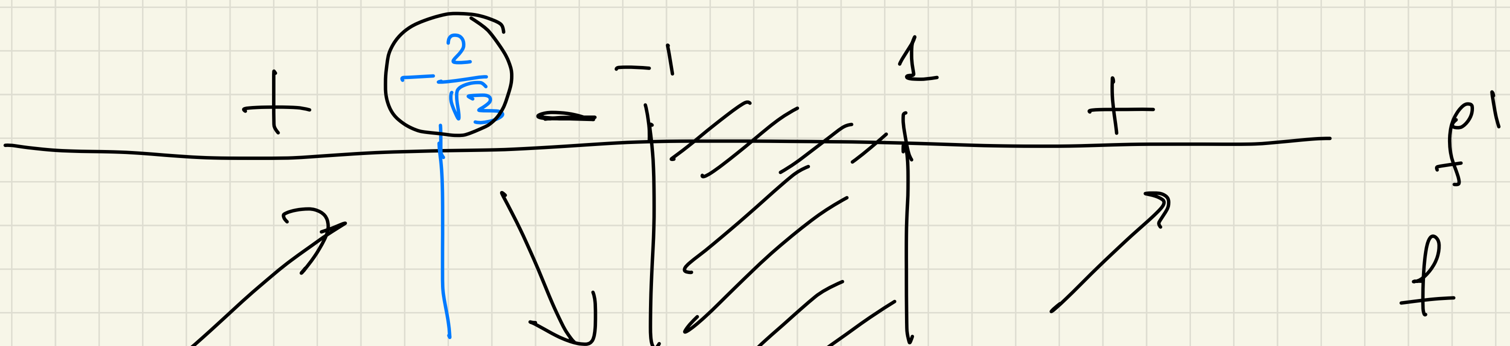
$1<\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$

$\frac{2}{\sqrt{3}}>1$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}<-1$

$$\cancel{x\geq\frac{2}{\sqrt{3}}} \quad \text{oppure} \quad x\leq-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

sto guardando quello che succede per $x<0$!



f crescente in $\left(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, decrescente in $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-1\right)$

$x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ è pto di MASSIMO LOCALE

(non globale perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

ES

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$$

$D = \{x \neq 4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

NO SIMMETRIE

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-4}\right) \geq 0 = \operatorname{arctg} 0$$

arctx è CRESCENTE

$$\frac{x^2}{x-4} \geq 0$$

$x^2 \geq 0 \ \forall x$

$f(x) \geq 0$ se $x > 4$

$f(x) \leq 0$ $x < 4$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-4}\right) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overset{\to +\infty}{x^{\cancel{2}}}}{\cancel{x}\underbrace{\left(1-\frac{4}{x}\right)}_{1}}\right)$$

$$= \operatorname{arctg} +\infty = \frac{\pi}{2}$$

$y=\frac{\pi}{2}$ è as. orizzontale a $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overset{\to -\infty}{x^{\cancel{2}}}}{\cancel{x}\underbrace{\left(1-\frac{4}{x}\right)}_{1-0=1}}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$y=-\frac{\pi}{2}$ è as. orizz. a $-\infty$

$$\lim_{x\to 4^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-4}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$x^2 \to 16$, $x-4 \to 0^+$

$$\lim_{x\to 4^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-4}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$x^2 \to 16$, $x-4 \to 0^-$

$x=4$ È SINGOLARITÀ DI SALTO

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x-4}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2}{x-4}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^4}{(x-4)^2}} \cdot \frac{2x\cdot(x-4) - x^2\cdot(1-0)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(x-4)^2 + x^4}{\cancel{(x-4)^2}}} \cdot \frac{2x^2 - 8x - x^2}{\cancel{(x-4)^2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(x-4)^2 + x^4}}_{>0} \cdot \underbrace{(x^2 - 8x)}$$

f è derivabile in D

$(D = \{x \neq 4\})$

$$\underbrace{f'(x) \geq 0} \iff x^2 - 8x \geq 0$$

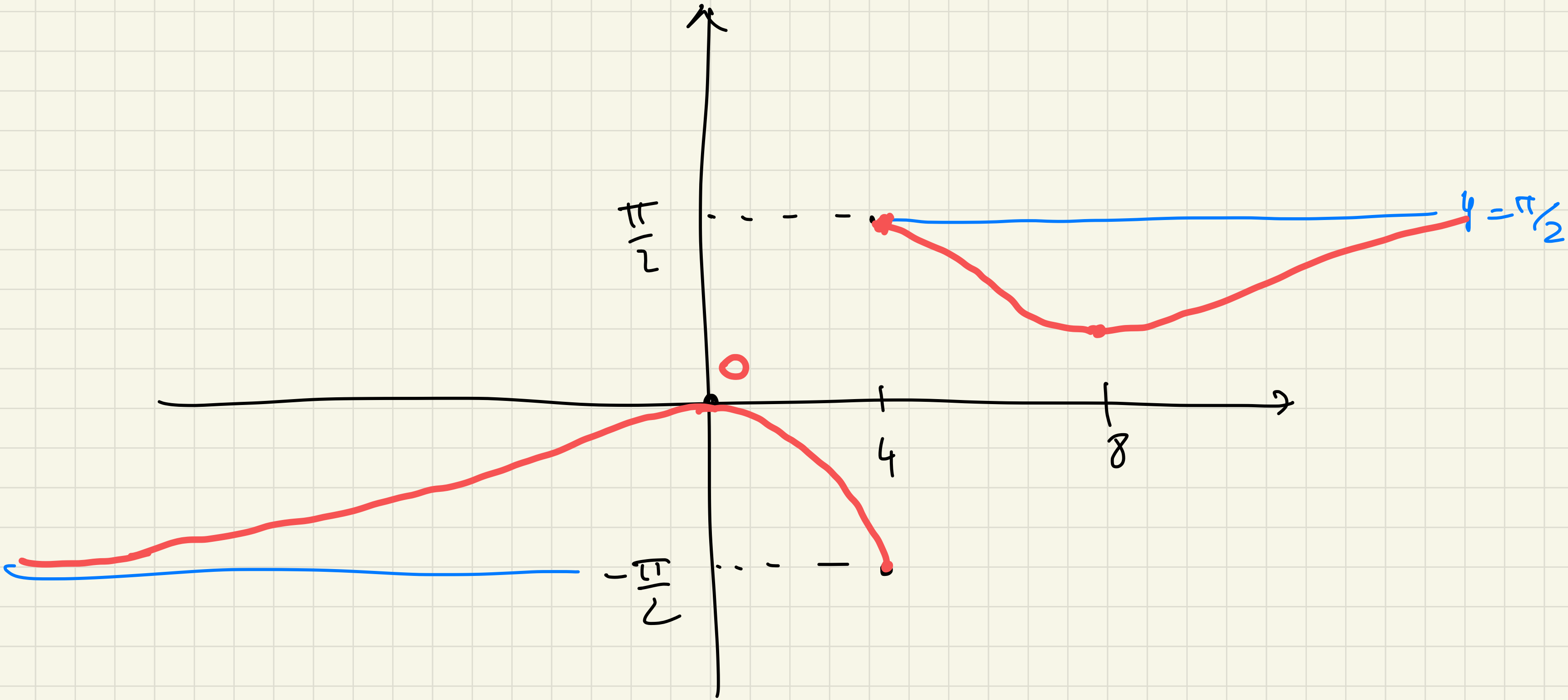
$x \geq 8$
e
$x \leq 0$

		0		4		8	
f'	$+$	|	$-$		$-$	|	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x = 0$ pto di MASSIMO LOCALE, <u>NON GLOBALE</u>

$x = 8$ pto di MINIMO LOCALE, NON GLOBALE

$f(0) = \text{arctg}\left(\frac{0}{0-4}\right) = 0$ $\qquad$ $f(8) = \text{arctg}\left(\frac{64}{4}\right) = \text{arctg}\,16$


π/2
-π/2
0
4
8
y = π/2

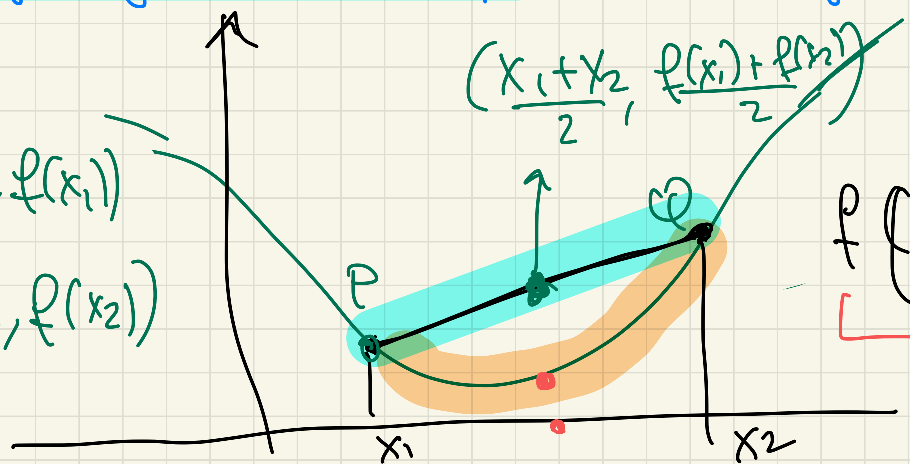
Def (SOLO DEFINIZIONE GEOMETRICA)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice CONVESSA se il suo grafico soddisfa queste proprietà:

presi 2 pti del grafico, il segmento che li congiunge sta sopra al grafico della funzione

$P = (x_1, f(x_1))$

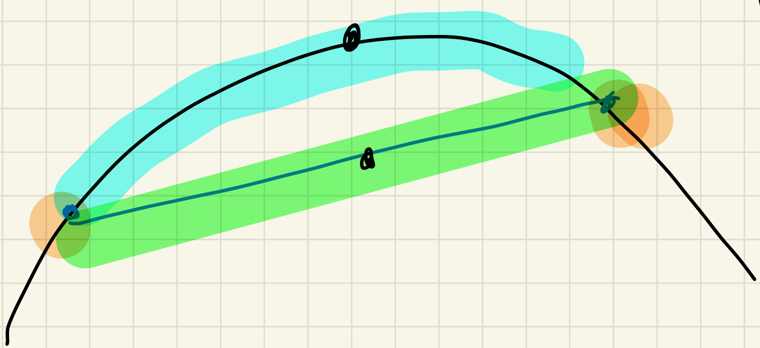
$Q = (x_2, f(x_2))$



$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

f è concava se il suo grafico soddisfa la proprietà che presi 2 pti del grafico, il segmento che li congiunge è sotto il grafico della funzione

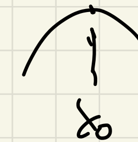


$\forall\ x_1, x_2$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}$$

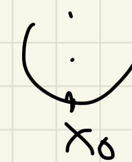
se x_0 è pto di max locale

→ vicino a x_0 f sarà concava

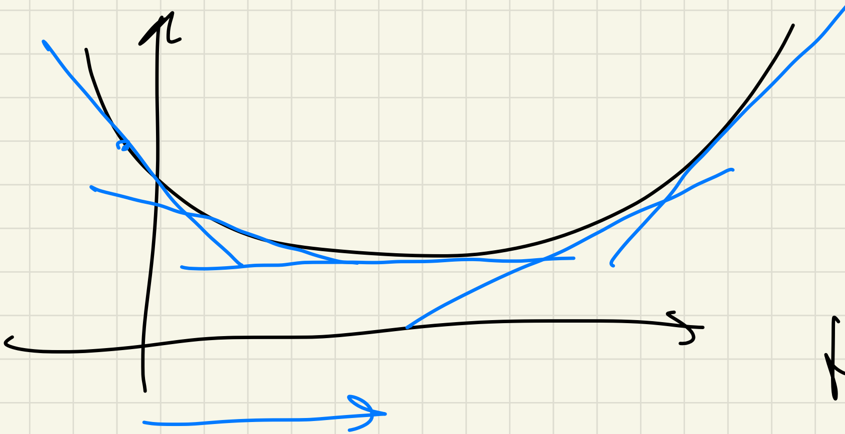


se x_0 è pto di min locale

→ vicino a x_0 f sarà convessa



<u>OSS</u> se il grafico di f è una retta, f è sia concava che convessa



f convesso

$\downarrow$

pendenza rette tangenti cresce

$\downarrow$

f' crescente

$\downarrow$ crit. monotonia

$(f')' \geq 0$

CRITERIO di CONVESSITÀ

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{(f')'(x) = f''(x)}_{\text{DERIVATA SECONDA di } f} \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

(DERIVATA della DERIVATA

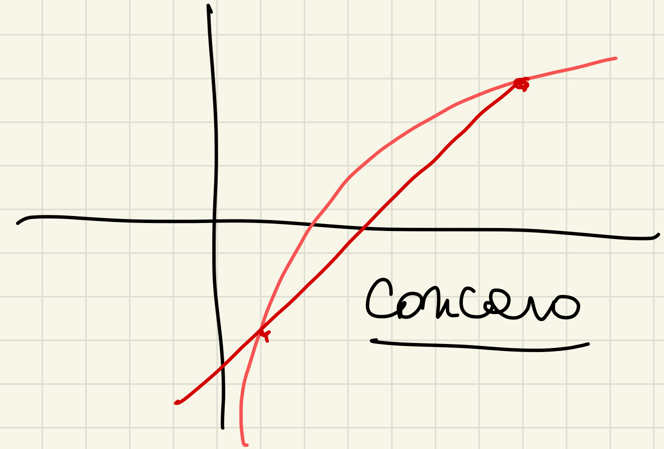
$$\Updownarrow$$

f è convessa in (a,b)

$f''(x) \leq 0 \iff f$ è concava.

Es $f(x) = \log x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$



concavo

$$(f'(x))' = f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= (x^{-1})' = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

es

$$f(x) = \lg\left(e^{2x}+4\right) - 2x$$

NON OCCORRE STUDIARE SEGNO

dominio, ~~segno~~, limiti, asintoti,

f', monotonia, massimi minimi

f'', convessità / concavità.

D: $e^{2x}+4>0$ vero sempre

$$\boxed{D = \mathbb{R}} = (-\infty, +\infty)$$

NE' PARI

NE' DISPARI

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\log\left(e^{2x}+4\right)}_{\log(0+4)=\log 4} - 2x = \log 4 + \infty = +\infty$$

$$e^{2x} \to e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{2x}+4\right) - 2x =$$

$\log(ab) = \log a + \log b$

$y = 0$ è AS. ORIZZ a $+\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{2x}\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right)\right) - 2x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\cancel{\log e^{2x}}}_{2x} + \log\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right) \cancel{-2x} = \log 1 = 0$$

as. obliquo a $-\infty$

$$y = -2x + \log 4$$

È AS. OBLIQUO a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^{2x}+4) - 2x}{x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^{2x}+4)}{x} - \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{\log 4}{-\infty} - 2 = -2 = m$$

$\log(e^{2x}+4) \to \log 4$, $x \to -\infty$; $\frac{\log 4}{-\infty} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \log(e^{2x}+4) - \cancel{2x} - \cancel{(-2)x} = \log 4$$

$e^{2x} \to 0$