- Teorema di Fermat — DIM

  f deriv. in x_0

  x_0 pto di max (min) locale $\Longrightarrow f'(x_0)=0$

- Teorema — DIM

  f deriv. in x_0 allora f è continua in x_0.

  (viceversa non è vero)

Teorema di Lagrange (o della media) — NO DIM

f continua $[a,b]$ derivabile in (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \quad a<c<b$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CRITERIO DI MONOTONIA

$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f' : (a, b) \to \mathbb{R}$

DERIVABILE (e quindi CONTINUA) in tutti i punti $x_0 \in (a, b)$.

① $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff$ f MONOTONA CRESCENTE in (a, b)

$a < x_1 < x_2 < b$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Equivalent

①' $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff$ f MONOTONA DECRESC.

$a < x_1 < x_2 < b$

$f(x_1) \geq f(x_2)$

2) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow$ f è MONOTONA Strett. CRESCENTE

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(viceversa NON È VERO

$f(x) = x^3$ è STRETTAM. CRESCENTE ma

$f'(x) = 3x^2$ NON È SEMPRE > 0 $\quad f'(0) = 0$)

2') $f'(x) < 0 \quad \forall x \Longrightarrow$ f è MONOTONA strett. DECRESC.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

DIMOSTR. (dimostro 1 e 2)

① Assumo che f sia monotona CRESCENTE

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{se} \quad x_1 > x_2$$

e mostro che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

fisso $x \in (a,b)$ $\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

perché limite esiste

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

$f(x+h)-f(x) \geq 0$, $\quad h > 0$

$h > 0 \quad x+h > x$

$f(x+h) \geq f(x)$ $\quad f$ è CRESCENTE

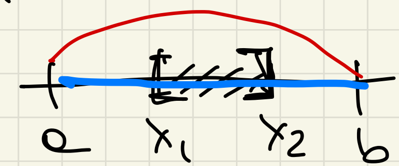
⊙ Assumo che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$(f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b))$

e devo mostrare che se $a < x_1 < x_2 < b$

allora $f(x_1) \leq f(x_2)$

$(f(x_1) < f(x_2))$



CONSIDERO INTERVALLO CHIUSO $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$

f è continua in $[x_1,x_2]$ e derivabile in (x_1,x_2)

applico teorema di Lagrange in $[x_1,x_2]$

$\downarrow$

$\exists\, c \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$$

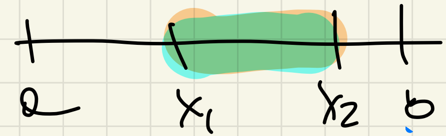
$$> 0$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$$

$$> 0$$

$$x_2 - x_1 > 0$$

$$x_2 > x_1$$



$$\Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

$$\big(f(x_2) - f(x_1) > 0\big) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Per studiare andamento di una funzione
studio segno derivata

f' $+$ x_0 $-$ x_1 $+$ x_2 $-$

derivata $+$ $\Downarrow$ f crescente

derivata $-$ f decresc.

se $x_0 \in D$ o x_0 è aggiunto al dominio (SING. ELIMIN.)
x_0 è pto di MAX LOCALE

$\boxed{\text{Corollario}}$ Se f è derivabile $\forall x \in (a,b)$

e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

allora f è COSTANTE $\quad f(x) = k$ per ogni $x \in (a,b)$

e anche il viceversa è vero $(k' = 0)$

dim $\quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$

per il criterio di monotonia $\Longrightarrow$

f sia crescente che decrescente

$\Longrightarrow$ f costante.

Es

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$D: \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

f dispari

$$f(-x) = \operatorname{arctg}(-x) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) =$$
$$= -\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -f(x)$$

$x > 0 \quad \operatorname{arctg} x > 0 \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} > 0 \quad \Rightarrow f(x) > 0$

$x < 0 \quad f(x) < 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \cancel{\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} = \text{"}\operatorname{arctg} +\infty\text{"} = \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{arctg} 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \text{"}\operatorname{arctg}(-\infty)\text{"} = -\frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{arctg} 0 = 0$ $\qquad$ $\frac{1}{x} \to -\infty$

$x=0$ è SINGOLARITÀ di SALTO.

$$\lim_{x\to 0^+} f = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$x \to +\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{x} \to 0$

$\operatorname{arctg} 0 = 0$

$y = \frac{\pi}{2}$ è

AS. ORIZZ a $+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{x} \to 0$ $\qquad$ $\operatorname{arctg} 0 = 0$

$y = -\pi/2$ è

AS. OR a $-\infty$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\underbrace{f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = \underbrace{-1 \cdot x^{-2}}$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\alpha = -1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

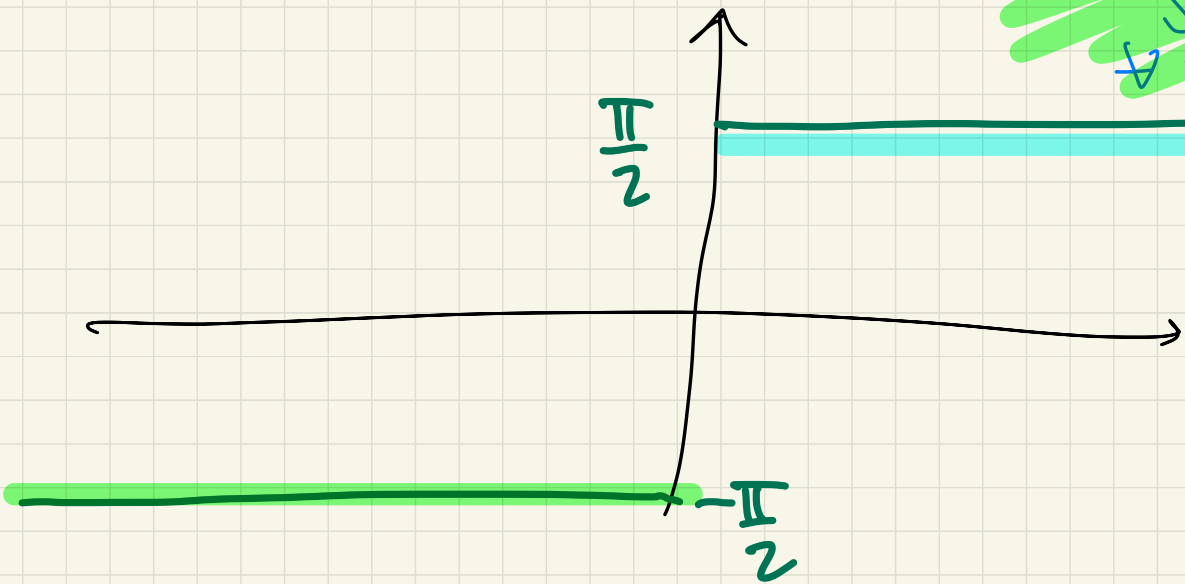
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in D \quad (\forall x \neq 0) \quad \begin{array}{l} \forall x \in (-\infty, 0) \\ \forall x \in (0, +\infty) \end{array}$$

f è costante in $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in (0,+\infty)$

f è costante in $(-\infty, 0)$

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ $\forall x \in (-\infty, 0)$.



Es

$$f(x) = (x^2-1)\cdot \log(|x-1|)$$

dominio, simm, ~~segno~~ segno,
limiti, asintoti
derivata, interv. monotonia, pto di max/min locale e glob.

$$|x-1| > 0 \Rightarrow x \neq 1$$

1 (o)

$$D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

no simmetrie

SEGNO $\underbrace{(x^2-1)}\ \underbrace{\lg|x-1|} \geq 0$

$x^2-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1,\ x \leq -1$

$\lg|x-1| \geq 0 = \lg 1$

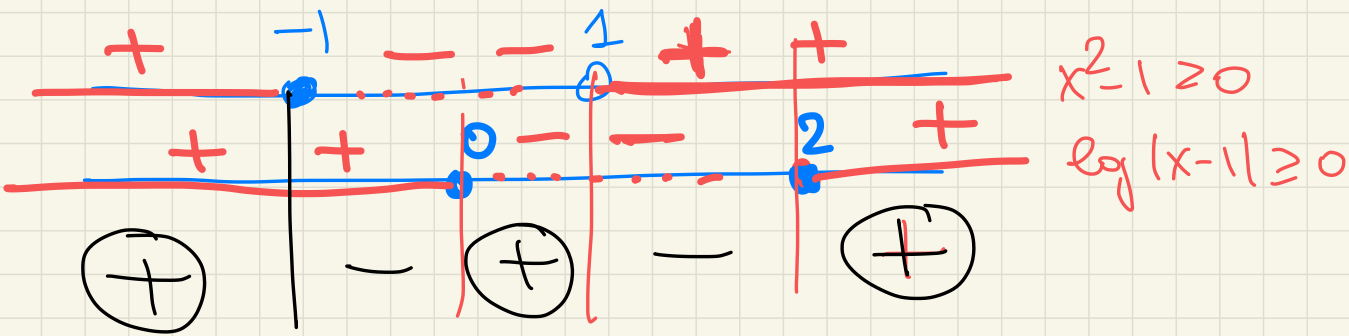
$\Downarrow$

$|x-1| \geq 1$

$|x-1| \geq 1$ → $x-1 \geq 1 \rightarrow x \geq 2$

oppure

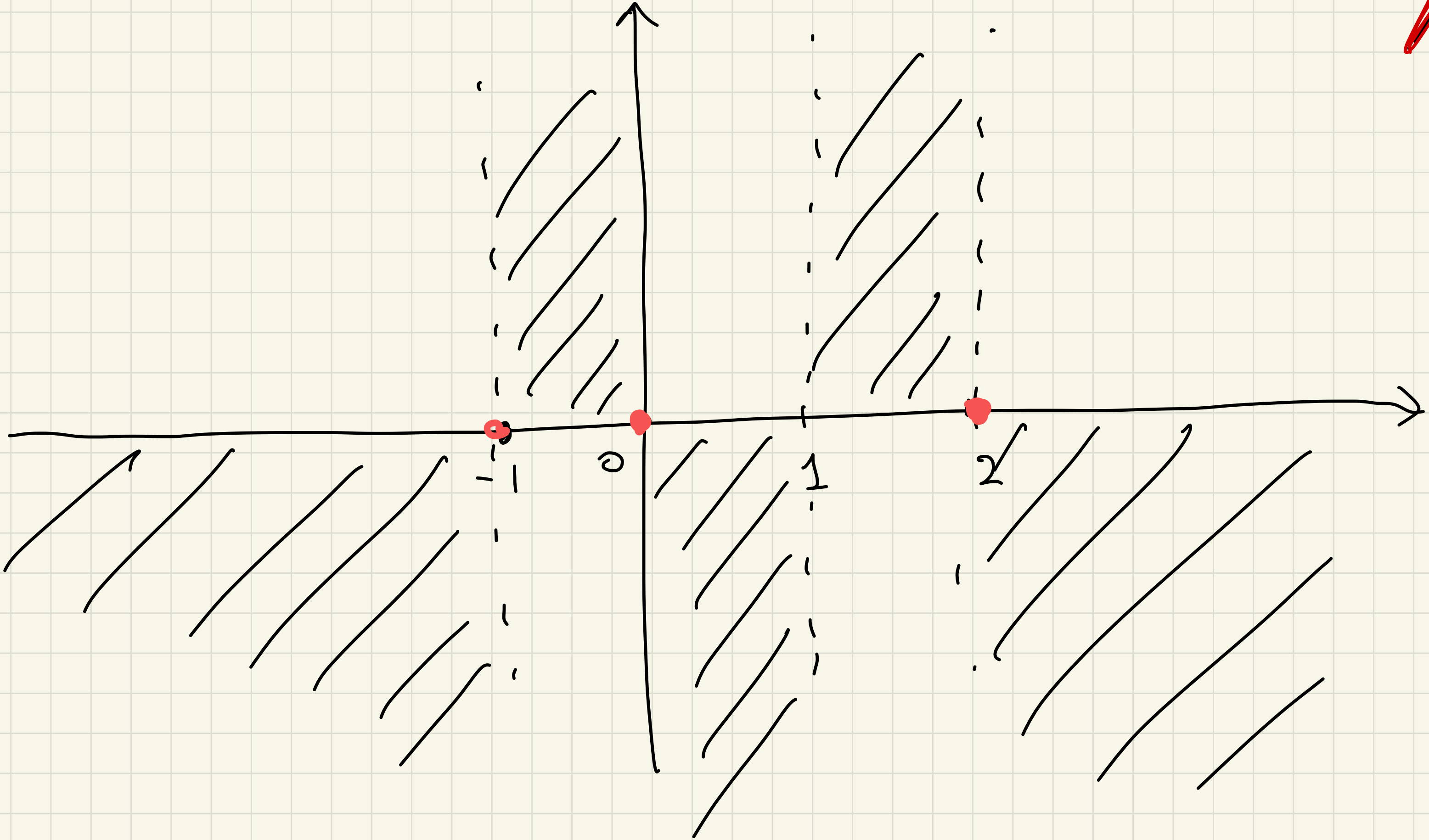
$x-1 \leq -1 \qquad x \leq 0$



$f(x) \geq 0 \qquad x \leq -1, \quad 0 \leq x < 1, \quad x \geq 2$

escludo perché $1 \notin D$

$f(-1) = 0 = f(2) = f(0)$



-1
0
1
2

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x^2-1)}_{+\infty} \underbrace{\lg|x-1|}_{\lg +\infty = +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x^2-1)}_{\substack{+\infty \\ (-\infty)^2-1=+\infty}} \underbrace{\lg|x-1|}_{\lg|-\infty| = \lg +\infty = +\infty} = +\infty$$

NON HO AS. ORIZZ.

cerco asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-1)\lg|x-1|}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\lg|x-1|}{\cancel{x}}$$

$$1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

$$= \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$$

NON HO AS. OBLIQUI

$$\lim_{x\to 1} (x^2-1)\,\lg|x-1|$$

$(x^2-1) \to 0$

$|x-1| \to 0^+$

$\lg(0^+) = -\infty$

f.i.

$$\lim_{x\to 0^+} x \lg x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \lg|x| = 0$$

$$= \lim_{x\to 1} \underbrace{(x+1)}\,(x-1)\,\lg|x-1|$$

$y = x-1$

$x \to 1$

$y \to 0$

$x = y+1$

$$= \lim_{y\to 0} (y+2)\,\underbrace{y \lg|y|} = 0$$

X=1 È SINGOLARITÀ ELIMINABILE → LA AGGIUNGO a D

$f(1) = 0$

Dominio esteso è $\mathbb{R}$

f è continua.

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x) = (x^2-1)\lg|x-1| \quad \forall x \neq 1 \end{cases}$$

$\vee$