Formule per il calcolo della derivata funzione inversa

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \lg x \quad \longrightarrow \quad (\lg x)' = \frac{1}{x}$

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \boxed{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$!

$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)}$$

Calcolo derivata della funzione tangente

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{\cancel{(\cos x)^2}}{\cancel{(\cos x)^2}} + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\operatorname{tg} x)^2$$

modo equivalente

$\forall x \in D$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2}$$

$$\operatorname{tg}'(x) = 1+(\operatorname{tg}(x))^2$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

$f(x) = \sin x \quad \to x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f^{-1}(x) = \arcsin x \qquad x \in [-1, 1]$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\underline{\sin'}(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$x \neq 1, -1$

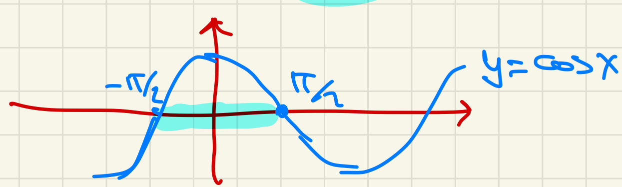
$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$

$x \in (-1, 1) \to \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\cos(\arcsin x) > 0}$



$x \in (-1,1)$

$$\boxed{\cos(\arcsin x) > 0}$$

$$\left(\cos(\arcsin x)\right)^2 + \underbrace{\left(\sin(\arcsin x)\right)^2}_{\|} = 1$$

$$[\cos(\arcsin x)]^2 + x^2 = 1$$

$$\underbrace{\sqrt{\left(\cos(\arcsin x)\right)^2}}_{\|} = \sqrt{1-x^2}$$

$1-x^2 > 0$ perché $x \in (-1,1)$

$$|\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\downarrow$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x \in (-1, 1)$$

$D \arcsin x = [-1, 1]$

D' derivata $= (-1, 1)$

① **Teorema**: Se f è derivabile in un punto $x_0 \in D$ allora f è continua in x_0.

①

②

Se per $x_0 \in D$ esiste finito $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

allora $\lim_{h \to 0} f(\underline{x_0+h}) = f(x_0)$ cioè f è continua in x_0

③ (SE ESISTE la derivata di f in x_0, allora f è continua in x_0).

(le formulazioni ①, ②, ③ sono equivalenti.

Quindi. Per ipotesi esiste finito

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h}{h} = 0$$

$h \to 0$

denominatore $\to 0$

$\frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} \to 0$ $\Big] \Rightarrow$ numeratore $\to 0$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

IL VICEVERSA non è VERO.

Se f è continua in x_0

cioè $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

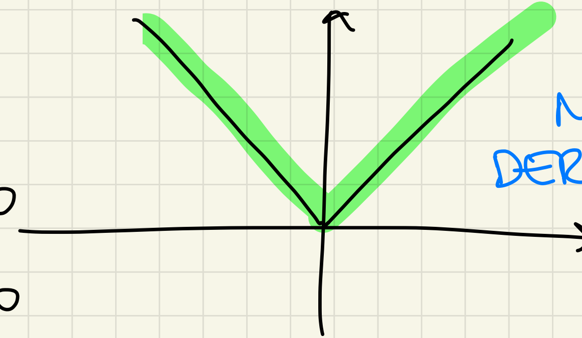
NON E' SEMPRE VERO che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ESISTA oppure ESISTA FINITO.

es. $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



NON È DERIVABILE in $x=0$

$x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} |0+h| = \lim_{h\to 0} |h| = 0 = f(0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h} =$$

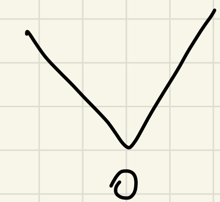
$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$ NON ESISTE

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Def se **f NON E' DERIVABILE** nel punto x_0

e
$$\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = L \in \mathbb{R} \\[2ex] \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = M \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$L \neq M$

x_0 si chiama **PUNTO ANGOLOSO**

Es $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$\underline{x_0 = 0}$ $\qquad \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{0 + h} = 0$

f è continua in tutti i punti di D

e anche in $x_0 = 0$

$h = \sqrt[3]{h^3}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h^3}} = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$\Rightarrow$ f non è derivabile in x_0

perché $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ESISTE MA INFINITO

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ è continua in $x_0=0$ ma NON

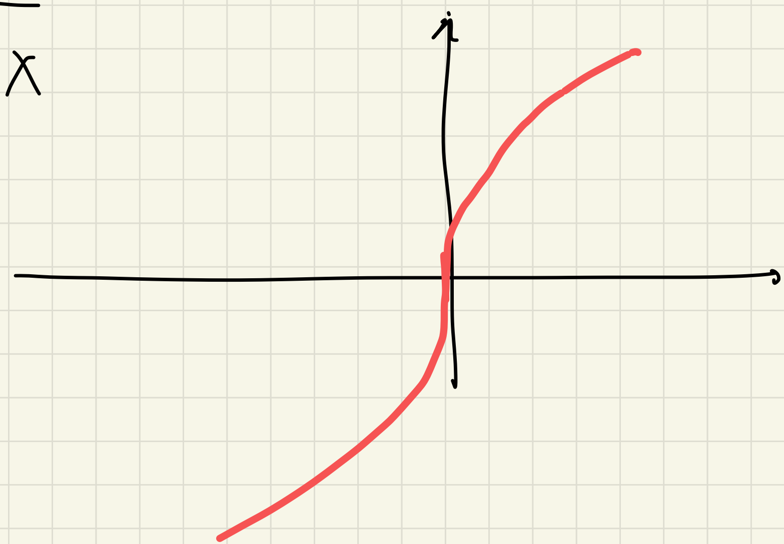
è DERIVABILE in $x_0=0$.

Def

Se $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty}$ (o $-\infty$)

x_0 si chiama PUNTO A TANGENTE VERTICALE

$f(x) = \sqrt[3]{x}$



<u>Es</u>

$$f(x) = \sqrt{|x|} \qquad D = \mathbb{R}$$

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \sqrt{|h|} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \qquad |h| = \sqrt{h^2}$$

calcolo limite dx e sinistro

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h^2}} =$$

$h \to 0^+$

$h > 0$

$|h| = h$

$\sqrt{h^2} = h$

$$= \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{h}{h^2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{h}} = +\infty$$

$\frac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{-\sqrt{h^2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} -\sqrt{\frac{|h|}{h^2}} = \lim_{h \to 0^-} - \sqrt{\frac{1}{|h|}}$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$= -\infty$$

$h < 0$

$$\sqrt{h^2} = |h|$$
$$= -h$$

$$h = -\sqrt{h^2}$$

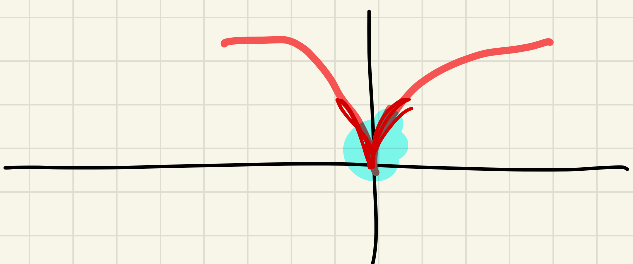
$$h = -|h| = -\sqrt{h^2}$$

$$|h|^2 = h^2$$

f NON E' DERIV. in x_0!

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty & (-\infty) \\ \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty & (+\infty) \end{cases}$$

$\rightarrow$ x_0 è DETTO PUNTO DI CUSPIDE



$f(x)=\sqrt{|x|}$

x_0 pto di non derivabilità per f

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = M \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$$

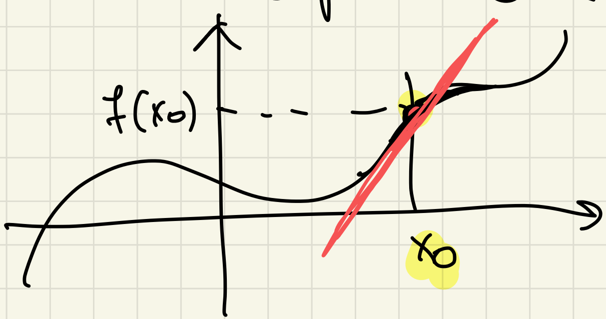
o viceversa

SIGNIFICATO geometrico della derivata

se f è derivabile in x_0

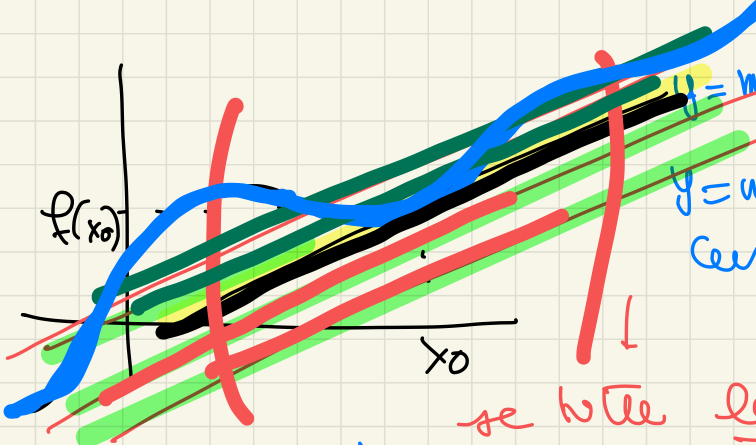
(cioè $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \underline{f'(x_0) \in \mathbb{R}}$

allora il grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ammette RETTA TANGENTE di equazione



$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

$f'(x_0)$ = PENDENZA RETTA TANGENTE



$y = mx+q$ è retta tangente alla curva nel pto $(x_0, f(x_0))$

se tutte le rette parallele alla retta $y = mx+q$ (DIVERSE DALLA RETTA STESSA) intersecano la curva grafico di f in NESSUN PUNTO OPPURE in 2 punti o più punti distinti se f è derivabile in x_0, e $f'(x_0)=0$

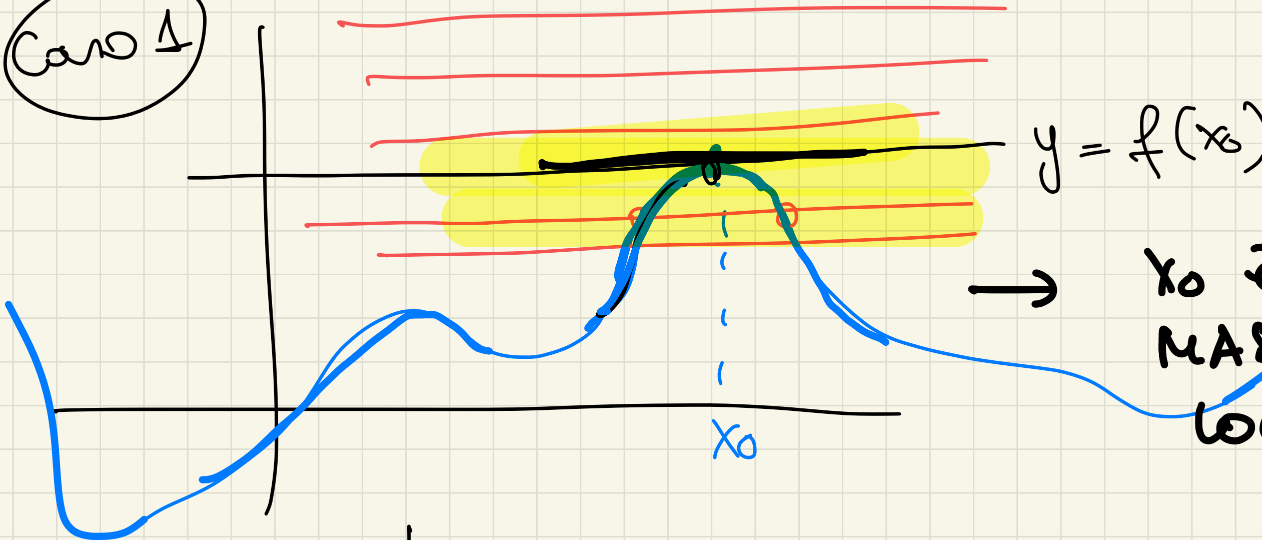
$\Rightarrow$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta di equazione $y = \cancel{0(x-x_0)} + f(x_0)$

$f'(x_0)$

$\Rightarrow y = f(x_0)$ $\quad y = \text{costante}$

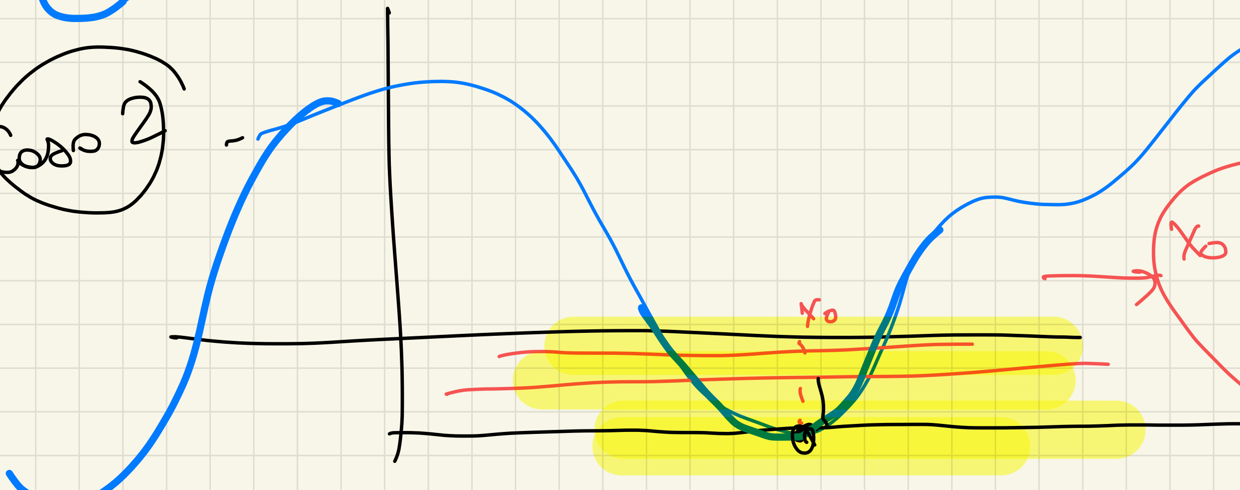
$\Rightarrow$ è una retta orizzontale

Caso 1



→ x_0 è pto di MASSIMO LOCALE (o GLOBALE)

Caso 2



→ x_0 pto di MINIMO LOCALE

$\Rightarrow$ Tuttavia NON È SEMPRE VERO

che se $f'(x_0)=0$ allora

* x_0 è pto di massimo locale
* o pto di minimo locale

ci possono essere altri casi

es $f(x)=x^3$ $\quad f'(x)=3x^2$

$f(x)=x^{\alpha}$ $\quad f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

$f'(0)=0$ $\quad x=0$ NON È NÉ PTO DI MAX né di MINIMO.

Teorema di Fermat

IPOTESI

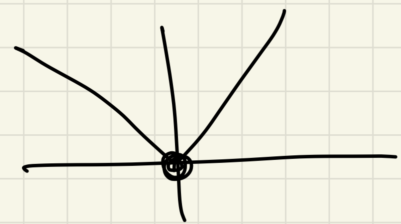
1. f DERIVABILE in x_0.
2. x_0 PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f oppure x_0 PUNTO DI MINIMO LOCALE per f

Allora sicuramente $f'(x_0) = 0$ TESI

(sicuramente la retta tangente è orizzontale).

(se $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow$ x_0 è pto di min. o massimo) (attenzione che se f NON È DERIVABILE in x_0, comunque x_0 potrebbe essere pto di massimo o minimo locale, ma $f'(x_0)$ NON È DEFINITO!

es $f(x) = |x|$



$f(x) \geq 0 = f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x=0$ PUNTO DI MINIMO GLOBALE

però $f'(0)$ NON ESISTE

dimostrazione

<u>ipotesi</u> (1) $f'(x_0)$ esiste finito

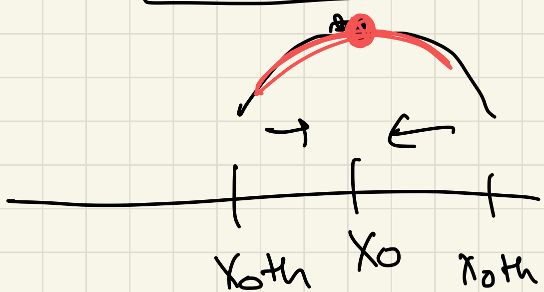
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Ipotesi 2 dice che x_0 pto di massimo locale

(se x_0 fosse punto di minimo locale l'argomento sarebbe lo stesso).

$$\boxed{f(x_0+h) \le f(x_0)}$$ se h è piccolo (positivo o negativo)



$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) \le 0}$$ per h vicino a 0.

$$-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad f(x_0+h)-f(x_0)\le 0 \text{ ipotesi 2} \qquad \frac{\le 0}{\ge 0} \to \le 0$$

$$\parallel \qquad \text{Ipotesi 1} \qquad \parallel$$

$$+\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad f(x_0+h)-f(x_0)\le 0 \qquad \frac{\le 0}{\le 0} \to \ge 0$$

$$\le 0 \;=\; \ge 0$$

l'unica possibilità per cui siano uguali è che siano entrambi 0.

TEOREMA di LAGRANGE (no DIMOSTRAZ.)

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che **f sia CONTINUA in $[a,b]$**

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall\, x_0 \in (a,b) \right.$$

$$\left. \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \right)$$

e **derivabile $\forall\, x_0 \in (a,b)$**

$$\left(\text{esiste finito } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \forall\, x_0 \in (a,b) \right)$$

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:

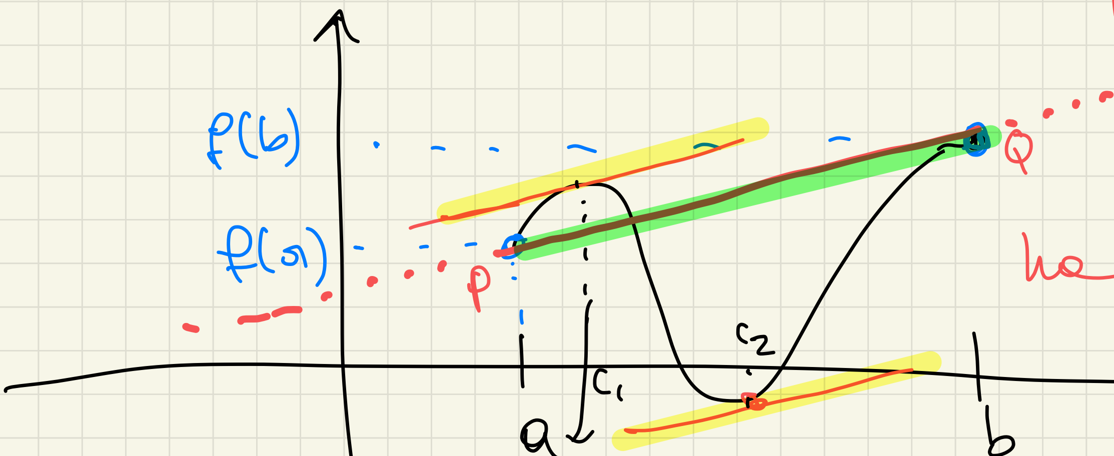
$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

→ PENDENZA RETTA TRA P e Q

$P = (a, f(a))$

$Q = (b, f(b))$

la retta che congiunge P e Q ha PENDENZA $\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$



in questo caso ci sono 2 pti c_1, c_2 tali che la retta tangente in quei punti è PARALLELA alla retta PQ

Applicazioni importanti (di cui non facciamo dim.)

$\boxed{\text{Teorema de l'Hôpital}}$ (ci permette di risolvere alcune forme indeterminate)

$x_0 \in \mathbb{R}$

f, g continue in $[x_0 - r, x_0 + r]$, e derivabili in $(x_0 - r, x_0)$, $(x_0, x_0 + r)$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ f.i. } \frac{0}{0}$$

SE ESISTE FINITO O INFINITO $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora è = uguale = $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = (\pm)\infty = \lim_{x \to x_0} g(x)$

e esiste finito o infinito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{allora è uguale} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3\cos x + 3e^x}{x + \log(1+x)} = \frac{0 - 3\,1 + 3.1}{0}$$

$\cos 0 = 1$ $\quad e^0 = 1$

$\log 1 = 0$

$f(x) = x^2 - 3\cos x + 3e^x \longrightarrow 0$

$g(x) = x + \log(1+x) \longrightarrow 0$

$D_g = \{x > -1\}$

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$f'(x) = 2x - 3(-\sin x) + 3e^x$$

$$= \frac{2x + 3\sin x + 3e^x}{}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{1+x}(0+1) = 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\overset{0+0+3}{2x+3\sin x+3e^{x}}}{\underbrace{1}_{1}+\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{1}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\text{(H)}\quad \boxed{\frac{3}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3\cos x+3e^{x}}{x+\lg(1+x)}}$$

altra applicazione di Lagrange

supponiamo $f : D \to \mathbb{R}$

e di saper calcolare $f'(x)$ con tecniche di calcolo per $\boxed{x \neq x_0}$

es $(\arcsin x)'$ la riesco a calcolare per $x \neq 1$, $x \neq -1$

se esiste finito $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ allora questo è $f'(x_0)$

se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ esiste FINITO o INFINITO

allora è uguale

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

se $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ esiste finito o infinito

allora coincide

con $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

es $\boxed{f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}}$ $D = \{x \neq 0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\overset{\to +\infty}{\frac{1}{x^2}}} = "e^{-\infty}" = 0$$

$x=0$ è singolarità eliminabile

aggiungo $x=0$ al dominio di f

PONENDO $f(0)=0$.

Voglio vedere se in $x=0$ la funzione è derivabile

$$\underbrace{f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}} \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\underbrace{x^{-2}}\right)' =$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\alpha = -2$$

$$= -e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-2)\, x^{-2-1} =$$

$$= \boxed{+2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3} = f'(x)} \qquad x \neq 0$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} f'(x)} = \lim_{x\to 0} 2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \| $$

$$e^{-\infty} = 0 \qquad +\infty \text{ se } x\to 0^+ \qquad f'(0)$$

$$-\infty \text{ se } x \to 0^-$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3} = 0 \qquad x \to 0^+$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad y = \frac{1}{x} \to +\infty$$

$$0 \qquad +\infty$$

$$\| \downarrow$$

$$\lim_{y\to +\infty} 2 e^{-y^2} y^3 = \lim_{y\to+\infty} 2 \frac{y^3}{e^{y^2}} = 0$$ per confronti infiniti

$$\lim_{x \to 0^-} 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{x} \to -\infty$$

$$\lim_{y \to -\infty} 2e^{-y^2} y^3 = \lim_{y \to -\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0$$

per confronto infiniti

$$\Rightarrow f'(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f'(x)$$