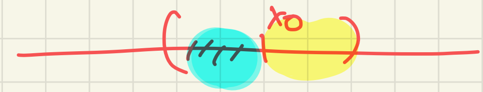
DERIVATA

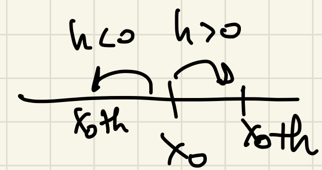


Def: sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$ tale che

$\forall r>0 \quad (x_0-r, x_0)\cap D \neq \emptyset \quad (x_0, x_0+r)\cap D \neq \emptyset$

(x_0 è di accumulazione per D sia a destra che a sinistra)

Chiamo derivata di f nel punto x_0 il valore finito (se esiste) del limite



$$\boxed{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{f "PRIMO"}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

se questo limite ESISTE ed è finito, si chiama DERIVATA di f in x_0. ($f'(x_0)$, un altro modo $\frac{df}{dx}(x_0)$)

La derivata di una funzione f in un pto x_0 è un numero (corrisponde al valore del limite)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Posso definire la FUNZIONE DERIVATA di f che in generale avrà dominio $D' \subseteq D$

(D' = dominio derivata f, D = dominio f)

f' funzione derivata di f

$\forall x \in D'$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\left[x \in D' \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ ESISTE FINITO} \right]$

Ex $f(x) = e^x$ $D = \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

fisso x e vedo se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} =$$

$$= e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{\text{limite notevole} = 1} = e^x \cdot 1 = e^x = f'(x)$$

Ex $\quad f(x) = x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = \lim_{h\to \infty} \frac{h}{h} = 1$$

$f'(x) = 1 \quad \forall x$ $\quad$ la funz. derivata è la funzione costante $=1$

$D = \mathbb{R} \qquad x \longmapsto 1$

Ex $\quad f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x+0 = 2x$$

se $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$.

In generale se $\boxed{f(x) = x^{\alpha}}$

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) \text{ se} & \alpha \geq 1 & D = \mathbb{R} & f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \\ & & & D' = \mathbb{R} \end{array}}$$

(2) se $0 \leq \alpha < 1 \rightarrow D' = D \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D = [0, +\infty)$ $\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} =$

$f(x) = x^{1/2}$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad D' = (0, +\infty)$ $\quad = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = x^{1/3}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} =$

$= \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

($f(x) = x^{\alpha}$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$\alpha < 0$ $\quad f(x) = x^{\alpha} \longrightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\quad x \neq 0$

$\downarrow$ D $\quad D' = D$

Es $f(x) = \sin x$

formula di addizione

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\sin x \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)}_{= -\frac{1}{2}} \cdot \overset{\to 0}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} = \cos x$$

$$\boxed{f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x}$$

& $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

Regole di calcolo per le derivate

(1) $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

(derivata di una somma è la somma delle derivate)

(2) $[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$= f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

es.

$$\Big(\underbrace{x^{3/4}}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g}\Big)' = \left(x^{3/4}\right)' \cdot \sin x + x^{3/4}\,\underbrace{(\sin x)'}_{} =$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$= \frac{3}{4}\, x^{\frac{3}{4}-1} \sin x + x^{3/4} \cdot \cos x$$

$$f(x) = x^{3/4} \sin x$$

$$= \underbrace{\sqrt[4]{x^3}}_{} \cdot \sin x$$

$$= \frac{3}{4}\, x^{-1/4} \sin x + x^{3/4} \cos x$$

$$D = [0, +\infty)$$

$$D' = (0, +\infty)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sin x + \sqrt[4]{x^3} \cos x .$$

(3) $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

es.

D: $x \neq 0$

$$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'\cdot x - (x)'\cdot \cos x}{x^2} = \frac{-\sin x\cdot x - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{-x\cdot \sin x - \cos x}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

$$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \left(\cos x \cdot \frac{1}{x}\right)' = \left(\cos x \cdot (x^{-1})\right)' = \text{formula (2)} =$$

$$= (\cos x)'\cdot x^{-1} + \cos x\cdot (x^{-1})' = -\sin x \cdot \frac{1}{x} + \cos x \cdot (-1)\cdot x^{-1-1} =$$

$$= -\sin x \cdot \frac{1}{x} - \cos x \; x^{-2} = -\sin x \cdot \frac{1}{x} - \cos x \, \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

4) $$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

derivata della funzione composta

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x) + [g(x+h) - g(x)]) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$h' = g(x+h) - g(x)$$

$$\frac{f(g(x) + h') - f(g(x))}{h'} \longrightarrow f'(g(x))$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow g'(x)$$

se $h' \to 0$
per $h \to 0$
(se g è CONTINUA)

ES $\quad f(x) = e^{\sqrt{2x}} \qquad D = [0, +\infty)$

$$x \longmapsto \sqrt{2x} \longrightarrow e^{\sqrt{2x}}$$

$\left(e^{\sqrt{2x}}\right)' =$ derivata della funzione esponenziale calcolata in $\sqrt{2x}$

MOLTIPLICATO

derivata della funzione $\sqrt{2x}$

$$\left(e^{\sqrt{2x}}\right)' = \underbrace{e^{\sqrt{2x}}}\left(\sqrt{2x}\right)'$$

derivata della funzione esponenziale calcolata in $\sqrt{2x}$

$$\left(\sqrt{2x}\right)' = \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\right)' = \cancel{\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)'\cdot\sqrt{x}}} + \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$\sqrt{2}$ è una costante $\rightarrow$ 0 è la funzione costante

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{2} \cdot (x^{1/2})' =$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{x^{\frac{1}{2}-1}}_{x^{-1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left(e^{\sqrt{2x}}\right)' = e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

es $\cos\left(x^2+e^x-\frac{1}{x^2}\right)=f(x)$ $D=\{x\neq 0\}$

$$f'(x)=-\sin\left(x^2+e^x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left[x^2+e^x-\frac{1}{x^2}\right]'=$$

$$=-\sin\left(x^2+e^x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left[(x^2)'+(e^x)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'\right]=$$

$$=-\left[\sin\left(x^2+e^x-\frac{1}{x^2}\right)\right]\cdot\left[2x+e^x-(-2)\,x^{-2-1}\right]$$

$=$

$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ $\quad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ $\quad \alpha=-2$

$$= -\sin\left(x^2+e^x-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left[2x+e^x+2\frac{1}{x^3}\right].$$

$\boxed{\text{Regola di calcolo della derivata della funzione inversa}}$

$f^{-1}(x)$ è la funzione inversa di f se

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D_f$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in D_{f^{-1}}$$

$\underbrace{\forall x \in D_{f^{-1}}}$ $\quad \underbrace{f(f^{-1}(x))} = x$ → quindi le 2 funzioni

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = \underbrace{(x)'}_{x' = 1}$$

$f(f^{-1}(x))$ e x hanno la stessa derivata

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \alpha = 1$$

$$\boxed{\left(f(\underbrace{f^{-1}(x)})\right)'} = 1$$

regola del calcolo della derivata f. composta

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

$$\boxed{(\underbrace{f^{-1}(x)})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

es. $f(x) = e^x$ $\quad \underbrace{f^{-1}(x) = \lg x}$ $\quad D'_{f^{-1}} = (0, +\infty)$

$$\underbrace{(\lg x)'} = \frac{1}{e^{\underbrace{f^{-1}(x)}}} = \frac{1}{e^{\lg x}} = \frac{1}{x}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(\underline{\underline{f^{-1}(x)}}\right)}$$

Un altro modo per calcolare

$$(\lg x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\lg(x+h) - \lg(x)}{h}$$

$x \neq 0$

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b$$

$$\lg(x+h) = \lg\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) = \lg x + \lg\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\lg x} + \lg\left(1+\frac{h}{x}\right) - \cancel{\lg x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x} h\right)}{h} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\lg(1+ax)}{x} = a$$