Test statistici

I test non parametrici

I test statistici non parametrici sono tecniche per verificare ipotesi su distribuzioni la cui forma o classe di appartenenza non è nota.

➢ Quando vi sono buone ragioni per supporre che il campione sia normale, conviene applicare i test parametrici che assumono che il campione sia normale, in quanto risultano più potenti.

➢ Se però l’assunzione di normalità non è verosimile per il campione in esame, e non possiamo neanche fare altre assunzioni sul tipo di distribuzione, conviene avvalersi di test statistici non parametrici

TEST DEI SEGNI

Il test dei segni è un test NON parametrico sulla mediana di un campione.

Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione avente distribuzione continua con funzione di ripartizione F_X incognita

Sistema di ipotesi:

- $H_0 : m = m_0$
- $H_1 : m \neq m_0$

Dove m è la mediana delle variabili X_i ed m_0 è una costante nota

Il test restituisce un p-value che confrontato con il livello di significatività consente di rifiutare o meno H_0

Esiste anche il test dei segni unilaterale per testare:

- $H_0 : m \leq m_0$
- $H_1 : m > m_0$

$H_0 : m \geq m_0$
$H_1 : m < m_0$

TEST DEI SEGNI

La procedura del test dei segni per un campione è semplice. Ad esempio se si dispone di un campione di N osservazioni ordinate in modo crescente:

0.5	0.6	1	2	4	5	8	9	10	12	19	24

E si vuole testare:

- $H_0: m = 15$
- $H_1: m \neq 15$

- si confronta ogni punteggio con il valore di paragone $m_o = 15$, trasformando in segni negativi i punteggi inferiori ed in segni positivi quelli maggiori, ottenendo

0.5	0.6	1	2	4	5	8	9	10	12	19	24
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+

- si contano i segni negativi (10) ed i segni positivi (2)

- (*la scala utilizzata dovrebbe essere continua e quindi non dovrebbero esistere valori uguali a quello di confronto, che danno una differenza di 0 da esso; qualora esistessero, le differenze uguali a 0 devono essere ignorate, con una pari riduzione delle dimensioni del campione*)

- se fosse vera l'ipotesi nulla, i segni negativi e quelli positivi dovrebbero essere approssimativamente uguali, con differenze imputabili alla casualità

- si sceglie uno dei due valori, di solito quello minore (2): se è vera l'ipotesi nulla, dovrebbe non discostarsi troppo da N/2, corrispondente a 6 con i dati dell'esempio;

- con la distribuzione binomiale: $P_N = \binom{r}{N} p^r q^{N-r}$

  N = numero di osservazioni totali (*nel nostro esempio = 21*)
  r = numero minore tra segni positivi e negativi

- Con i dati dell'esempio, N = 12 e r = 2, il p_value è uguale a 0.019, corrispondente a 1,9% quando espresso in percentuale. Questo risultato significa che, se fosse vera l'ipotesi nulla, si ha una probabilità pari a 1,9% di trovare per caso una risposta uguale a quella trovata.

- E' una probabilità piccola, inferiore a 5%; di conseguenza, si rifiuta l'ipotesi nulla ed implicitamente si accetta quella alternativa

-

TEST DI WILCOXON MANN-WHITNEY

Il test di Wilcoxon Mann-Whitney, anche detto test della somma dei ranghi di Wicoxon, test U di Mann-Whitney, è un test NON parametrico per testare se due **campioni** aleatori **indipendenti** presentano la stessa distribuzione.

Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione avente funzione di ripartizione F_X incognita e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ un secondo campione indipendente dal precedente e con funzione di ripartizione F_Y

Obiettivo del Test

- Confrontare le mediane di due campioni indipendenti per determinare se le distribuzioni sono simili.
- Alternativa non parametrica al t-test per campioni indipendenti, usata quando i dati non sono normalmente distribuiti.

Sistema di ipotesi:

- $H_0: F_X = F_Y$
- $H_1: F_X \neq F_Y$

In termini più operativi, il test permette di valutare che la probabilità di un'osservazione da un campione (X) ecceda una osservazione dal secondo campione (Y) sia 0.5:

H_0: $P(X > Y) = 0.5$
H_1: $P(X > Y) > 0.5$ oppure $P(X > Y) < 0.5$.

La statistica test viene calcolata a partire dalle osservazioni dei due campioni.
Per piccoli campioni, si può procedere in modo diretto. Ad esempio, supponiamo che:

ESEMPIO: *Nel centro storico di una città, per l'analisi della qualità dell'aria sono state rilevate le quantità di solventi aromatici (Benzene, Toluene, Etilbenzene, Xileni in microgrammi/mc) presenti in un giorno festivo ed in un giorno feriale:*

FESTIVO	X	92	114	82	164	167	110	135

FERIALE	Y	156	123	198	83	242	176	185	217

Mettiamo assieme i dati e li ordiniamo dal più piccolo al più grande. La posizione che ciascun dato ha nell’ordinamento si chiama rango:

	82	83	92	110	114	123	135	156	164	167	176	185	198	217	242
Ranghi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Si calcola la somma dei ranghi dei calori di X(valori rossi per il nostro esempio) e di Y:

$$R_X = 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 + 10 = 39$$
$$R_Y = 2 + 6 + 8 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 81$$

$$R_X + R_Y = 120 = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$$

La statistica test risulta:

$$U_X = R_X - \frac{n\,(n+1)}{2}$$

La statistica test U viene confrontata con una distribuzione nota (di definizione piuttosto complicata) che per dimensioni dei campioni sopra ~20 può essere approssimata con una distribuzione normale.

Fissato il livello di significatività, la statistica U viene utilizzata per definire il p-value sulla base del quale si decide se rifiutare o meno $H0$ (al solito si rifiuta $H0$ se p-value<α).

NOTA: Esistono anche le versioni unilaterali del test.

In altre parole: se i dati provengono dalla stessa distribuzione, essi saranno ben mescolati ed R_X ed R_Y tenderanno ad un valore intermedio, altrimenti saranno sbilanciati.

NOTA: Quando le distribuzioni dei due campioni aleatori hanno la stessa formulazione e scala e differiscono sono per uno shift, ovvero:

$$F_Y(v) = F_X(v + \Delta) \quad con\ \Delta = costante$$

Allora si può dimostrare che il test di Wilcoxon Mann-Whitney verifica il sistema di ipotesi:

- $H_0: M_X = M_Y$
- $H_1: M_X \neq M_Y$

Con M = mediana

TEST DEI RANGHI CON SEGNO

Il test dei segni per ranghi di Wilcoxon è un test non parametrico che si applica nel caso di un singolo campione con **due misure accoppiate.**

Esempio

Un ricercatore vuole analizzare l'efficacia di un programma di esercizi fisici su un gruppo di persone. Misura la loro frequenza cardiaca a riposo prima dell'inizio del programma e poi la rimisura dopo aver completato 8 settimane di allenamento.

In questo caso, le misure accoppiate sono:

Frequenza cardiaca a riposo all'inizio del programma (prima dell'intervento).

Frequenza cardiaca a riposo dopo 8 settimane (dopo l'intervento).

Date le coppie di dati:

$$X_1, Y_1$$
$$X_2, Y_2$$
$$\cdots$$
$$X_n, Y_n$$

i cui valori sono ordinali, il test dei ranghi con segno assume che le differenze

$X_i - Y_i$ ➔ abbiano distribuzione simmetrica rispetto alla mediana

L'ipotesi nulla è:

- $H_0: mediana\ di\ X_i - Y_i = 0$
- $H_1: mediana\ di\ X_i - Y_i \neq 0$

Esempio:

Supponiamo di avere 10 persone e di voler confrontare i loro tempi di reazione (in secondi) prima e dopo un programma di allenamento. I dati sono i seguenti:

Soggetto	Prima dell'allenamento	Dopo l'allenamento
1	15	12
2	18	16
3	22	20
4	20	19
5	17	13
6	19	15
7	21	20
8	16	14
9	23	18
10	24	22

Passaggi del Test dei Ranghi con Segno di Wilcoxon:

Calcolare le differenze tra le misure accoppiate (Post - Pre) e calcolare il valore assoluto di ciascuna differenza

Soggetto	Differenza (D)	Differenza (D) in valore assoluto
1	-3	3
2	-2	2
3	-2	2
4	-1	1
5	-4	4
6	-4	4
7	-1	1
8	-2	2
9	-5	5
10	-2	2

Assegnare i ranghi ai valori assoluti:

Nota: Ogni valore unico riceve un rango, ma se ci sono valori uguali (come nel caso dei valori assoluti 1, 2, e 4), assegniamo loro il rango medio

Soggetto	Differenza (D)	Differenza (D) in valore assoluto	Rango
1	-3	3	7
2	-2	2	4.5
3	-2	2	4.5
4	-1	1	1.5
5	-4	4	8.5
6	-4	4	8.5
7	-1	1	1.5
8	-2	2	4.5
9	-5	5	10
10	-2	2	4.5

Assegnare il segno (+ o -) a ciascun rango in base al segno della differenza originale (D).

Soggetto	Differenza (D)	Differenza (D) in valore assoluto	Rango	Segno
1	-3	3	7	-
2	-2	2	4.5	-
3	-2	2	4.5	-
4	-1	1	1.5	-
5	-4	4	8.5	-
6	-4	4	8.5	-
7	-1	1	1.5	-
8	-2	2	4.5	-
9	-5	5	10	-
10	-2	2	4.5	-

- **Calcolare la somma dei ranghi positivi e la somma dei ranghi negativi**

In questo esempio, tutti i ranghi sono associati a differenze negative, quindi:

Somma dei ranghi negativi $W_{-} = 55$
Somma dei ranghi positivi $W_{+} = 0$

- **Calcolare il valore del test T: è il più piccolo tra W_{-} e W_{+}**

Quindi, in questo caso: $T = 0$

- **Calcolare la somma dei ranghi positivi e la somma dei ranghi negativi**

In questo esempio, tutti i ranghi sono associati a differenze negative, quindi:

Somma dei ranghi negativi $W_{-} = 55$
Somma dei ranghi positivi $W_{+} = 0$

- **Calcolare il valore del test T: è il più piccolo tra W_{-} e W_{+}**

Quindi, in questo caso: $T = 0$

- **Confrontare la statistica del test T** con il valore critico della distribuzione di Wilcoxon per il numero di coppie (nell'esempio: 10) per determinare se la differenza è significativa

Per il nostro esempio il p_value è 0.002

rifiutiamo l'ipotesi nulla (assumiamo un livello di significatività pari al 5%,) ➔ C'è una differenza significativa tra i tempi mediani di reazione prima e dopo l'allenamento.

Esistono anche le versioni unilaterali del test

RIASSUNTO

Riassumendo abbiamo visto diversi test statistici parametrici e non parametrici per verificare ipotesi statistiche su uno o due campioni.

➢ Test statistici su un solo campione (o sulla differenza di 2 campioni)

Test	**Assunzioni**	**Ipotesi nulla**	**Funzione Matlab**
z test a un campione	Campione normale	$H0\colon\ \mu = \mu_0$ $(\mu = media)$	ztest
Test dei segni	Campione NON normale	$H0\colon m = m_0$ $(m = mediana)$	signtest (attenzione alla definizione della funzione)

RIASSUNTO

- Test statistici su due campioni indipendenti

Test	Assunzioni	Ipotesi nulla	Funzione Matlab
t test a due campioni	Campioni normali, varianze incognite ma uguali	$H0\colon \mu_1 = \mu_2$	test2
t test di Welch	Campioni normali, varianze incognite	$H0\colon \mu_1 = \mu_2$	ttest2 con l'opzione 'Vartype' 'unequal'
test di Wilcoxon Mann-Whitney	Campioni di valori ordinali con distribuzione che differisce solo per uno shift orizzontale	$H0\colon m_1 = m_2$	ranksum
test di Wilcoxon Mann-Whitney	Campioni di valori ordinali	$H0\colon F_1 = F_2$ (I campioni statistici provengono dalla stessa Funzione di ripartizione/popolazione)	ranksum

RIASSUNTO

- Test statistici su due campioni appaiati (quindi dipendenti)

Test	Assunzioni	Ipotesi nulla	Funzione Matlab
t test per dati appaiati	Campione normale	$H0: la\ differenza\ delle\ medie = 0$	ttest passando in ingresso la differenza tra i campioni
Test dei ranghi con segno di Wilcoxon	Campione NON normale	$H0: la\ differenza\ delle\ mediane = 0$	signrank (attenzione a come è definita la funzione)

RIASSUNTO

- Test statistici più di due campioni normali

Test	**Assunzioni**	**Ipotesi nulla**	**Funzione Matlab**
ANOVA	Campioni normali omoschedastici (le varianze dei gruppi sono uguali)	$H0: le\ medie\ di\ tre\ o\ più\ campioni\ sono\ uguali$	anova1

RIASSUNTO

➢ Altri test statistici

Test	Assunzioni	Ipotesi nulla	Funzione Matlab
Analisi della varianza (F-test)	Campioni normali	$H0: le\ varianze\ di\ due\ campioni\ sono\ uguali$	vartest
Levene (non visto come teoria ma riportato a lezione)	Campioni normali	$H0: le\ varianze\ di\ più\ di\ due\ campioni\ sono\ uguali$	vartestn(data,groups,'TestType','LeveneAbsolute’)
Lilliefors test	Campione	$H0: i\ campioni\ provengono\ da\ una\ funzione\ di\ ripartizione\ normale$	lillietest

Correlazione di Spearman

- La correlazione di Spearman, o coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman, o indice di correlazione R per ranghi di Spearman, è un indice di correlazione non parametrico, che viene indicato con la lettera greca $\boldsymbol{\rho}$ (rho).
- Deve il suo nome allo psicologo Charles Spearman, che lo ideò nel 1904.
- Questo coefficiente permette di calcolare la potenza del rapporto tra due variabili quantitative o qualitative ordinali, ed è un'approssimazione del coefficiente di correlazione lineare, o indice di correlazione di Pearson.

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

ρ = coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman

d_i = differenza tra i due ranghi di ogni osservazione

n = numero di osservazioni

- Calcolare la correlazione di Spearman tra X e Y è abbastanza semplice

Si ordinano i valori di X e di Y
Si assegnano i ranghi, dando il numero 1 al valore più piccolo, tenendo conto anche dei valori uguali
Si calcolano le differenze tra i ranghi (d) per ogni coppia X e Y di partenza

Correlazione di Spearman

```
% Definisci le variabili X e Y
X = [5, 10, 15, 20, 25];
Y = [8, 6, 12, 9, 16];

% Calcola il rango di X e Y
rank_X = tiedrank(X);
rank_Y = tiedrank(Y);

% Calcola la differenza dei ranghi
rank_diff = rank_X - rank_Y;

% Calcola la correlazione di Spearman
n = length(X);
spearman_corr = 1 - (6 * sum(rank_diff.^2)) / (n * (n^2 - 1));

disp(['La correlazione di Spearman tra X e Y Ã¨: ',
num2str(spearman_corr)]);
```

- Il range e l’interpretazione sono le stesse fatte per Pearson