UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I

Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Limiti notevoli e calcolo di limiti di successioni

Tutor: Guido Costagliola

Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"Mathematics knows no races or geographic boundaries.
For mathematics, the cultural world is one country".

-D. Hilbert

Lista di limiti notevoli utili:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\log a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$$

e relative generalizzazioni, ove x viene sostituita da $f(x)$, a patto che quest'ultima tenda allo stesso valore cui tendeva x. Per esempio:

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=1.$$

1 Limiti notevoli

Calcolare i seguenti limiti di funzione, sfruttando opportunamente e dove possibile i limiti notevoli conosciuti.

1. $(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3}$ $\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

2. $(a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$ $\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^x-x}{1+x^2}$

3. $(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(2-\cos x)}{\sin^2 x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x^3}$

4. $(a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)^{\tan^2 x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\sin\left(e^{-x}\sin x\right)}{x}$

5. $(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\tan^4 x+1)}{e^{2\sin^4 x}-1}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\log(1+\sin^4 x)}$

2 Limiti di successioni

Calcolare i seguenti limiti di successioni.

1. $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$$

2. $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{20}+4n^4+1}{n!}$$

3. $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+9n}-\sqrt{n^4+1}}{n^2+2n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^5+1}$$

4. $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}$$

5. $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)}$$

Soluzioni

Limiti notevoli

1.
$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x^2}{x^4}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} = \frac{1}{2}$$

2.
$$(a) \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)\cancel{(\cos x - \sin x)}}{-\cancel{(\cos x - \sin x)}} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} -(\cos x + \sin x) = -\sqrt{2}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot (1+\cos x+\cos^2 x) = \frac{3}{2}$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^x - x}{1+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log x} - x}{1+x^2} = e^0 = 1$$

Dove in (a) si è utilizzata la relazione trigonometrica $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ e in (c) si è utilizzato che $x^x = e^{\log x^x} = e^{x\log x}$ e che $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$. Quest'ultimo risultato lo dimostreremo con il teorema di de L'Hôpital a tempo debito.

3.
$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(2-\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}_{\to 1} \cdot \frac{\log(1+1-\cos x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2 \cdot \overbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}^{\to \frac{1}{2}})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+\frac{x^2}{2})}{\frac{x^2}{2}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x^3} = 0$$

Infatti $2 \leq 3 + \sin x \leq 4$, dunque, preso $x > 0$, si ha $\frac{\log 2}{x^3} \leq \frac{\log(3+\sin x)}{x^3} \leq \frac{\log 4}{x^3}$. E il risultato segue dal Teorema dei Carabinieri.

4.

$$(a) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2 x)^{\tan^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}}_{\to e} \right]^{\sin^2 x} = e$$

$$(b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x \sin(e^{-x}\sin x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin(e^{-x}\sin x)}{e^{-x}\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0} \cdot \cancel{e^x} \cdot \cancel{e^{-x}} = 0$$

Nota: Ricorda che $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \neq 1$! La forma corretta è $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

5.

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\tan^4 x + 1)}{e^{2\sin^4 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+\tan^4 x)}{\tan^4 x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2\sin^4 x}{e^{2\sin^4 x} - 1}}_{\to 1} \cdot \frac{\tan^4 x}{2\sin^4 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin^4 x}}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sin^4 x}} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\log(1+\sin^4 x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^4 x}{\log(1+\sin^4 x)}}_{\to 1} \cdot \left(\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \right)^2 \cdot \underbrace{\frac{x^4}{\sin^4 x}}_{\to 1} = \frac{1}{4}$$

Limiti di successioni

1.

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$(b) \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$

2.

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)n! - n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{20} + 4n^4 + 1}{n!} = 0$$

Infatti $n!$ cresce più velocemente di qualunque potenza: $n! >> n^a \ \forall a \geq 1$ per $n \to +\infty$.

3.

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+9n}-\sqrt{n^4+1}}{n^2+2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+9n}-\sqrt{n^4+1}}{n^2+2n}\cdot\frac{\sqrt{n^4+9n}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+9n}+\sqrt{n^4+1}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^4}+9n-\cancel{n^4}-1}{n(n+2)(\sqrt{n^4+9n}+\sqrt{n^4+1})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9n-1}{n^3(n+2)\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)}=0$$

$$(b)\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n^5+1}=\lim_{n\to+\infty}(2n^5+1)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}(2n^5)^{\frac{1}{n}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n^5}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{2^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}n^{\frac{5}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{5\frac{\log n}{n}}=e^0=1$$

4.

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right]^{\frac{n}{n!}}=e^0=1$$

$$(b)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n^n}\right]^{\frac{n!}{n^n}}=e^0=1$$

5.

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n^4}{3}}\right)^{\frac{n^2+n^4}{3}}\right]^{\frac{3n}{n^2+n^4}}=e^0=1$$

$$(b)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n^3}{\log n^3+\underbrace{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}_{\to 0}}=1$$