$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \qquad \forall a\in\mathbb{R}$$

$\downarrow$ ponte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+ax\right)^{\frac{1}{x}} = e^a$$

$x\to 0$

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}\underbrace{\lg(1+ax)}_{0}}$$

$$a^b = e^{b\lg a}$$

$$b\lg a = \lg a^b$$

$$e^{b\lg a} = e^{\lg a^b} = a^b$$

$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a$ $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \frac{0}{0}$

$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - x^2$ $\quad +\infty - \infty$

$+\infty \quad -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^4 - x^2 = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^4}_{+\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}_{1-0=1}$

ORDINE DI INFINITO.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x) = \pm\infty$$

(es $\lg x$ per $x \to 0^+$

e^x per $x \to +\infty$)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} g(x) = \pm\infty$$

prendo 2 funzioni che tendono entrambe a ∞ ($\pm\infty$ non importa) per x che tende allo ~~stesso~~ limite

es. $\lg x \to -\infty$ per $x \to 0^+$

$\frac{1}{x} \to +\infty$

oppure $\frac{x^2}{e^x}$ per $x \to +\infty$

f è INFINITO DI ORDINE MAGGIORE di g

se
$$\lim_{x \to x_0, +\infty, -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

es. $f(x) = x^4$
$g(x) = x^2$ per $x \to +\infty$

x^4 è di ordine maggiore di x^2

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

f è infinito di ordine MINORE di g

se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

f e g hanno lo stesso ordine di infinito se

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

$\left(\lim_{x \to \dots} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{c} \neq 0 \right)$

$f \sim g$ per $x \to x_0$ $(+\infty, -\infty)$

es $f(x) = x^3 + 3x + 1 \qquad x \to +\infty$

$g(x) = 3x^3 - 2x^2$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{3x^3 - 2x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{1+0+0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

$f \sim g$ (f e g hanno lo stesso ordine di infinito)

per $x \to x_0 / \infty / +$

Se ho limite con una forma indet.
del tipo $+\infty - \infty$ ..
devo raccogliere a fattor comune
sempre l'infinito di ordine
MAGGIORE

Un criterio per stabilire gli ordini di infinito (e non solo), → un criterio per calcolare limiti di tipo $\frac{\infty}{\infty}$ per successioni

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia (a_n) successione tale che $\boxed{a_n > 0 \ \forall n}$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$$

1) Se $0 \leq L < 1$ $\quad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ $\quad \left(a_{n+1} < a_n \text{ per } n \to +\infty \right)$

$\Rightarrow \lim_n a_n = 0$

2) Se $L > 1$ $\quad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ → $a_{n+1} > a_n$ per $n >> n_0$

$\Rightarrow \lim_n a_n = +\infty$

Se $L=1$ non ho informazioni sul limite a_n

$$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1} \quad ?$$

<u>Es</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \qquad a_n = \frac{n^2}{2^n} > 0 \quad n > 0$$

applico crit rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad a_n = \frac{n^2}{2^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \boxed{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{\underbrace{2^{n+1}}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n})^2}{\underbrace{\cancel{2^n}\cdot 2}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n^2}}$$

$$(n+1)^2 = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 = n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{(1+0)^2}{2} = \frac{1}{2} = L$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_n a_n = \lim_n \frac{n^2}{2^n} = 0} \Rightarrow$$

2^n è infinito di ordine maggiore di n^2.

$\forall k \geq 0 \quad \forall a > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

$$a_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{a} \to \frac{1}{a} < 1$$

$a>1$

a^n è INFINITO di ordine maggiore di n^k.

$\downarrow$ teorema ponte

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1 \quad \forall k}$$

INFINITO ESPONENZIALE E' di ordine MAGGIORE DEL POLINOMIALE tornando al primo esempio

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - x^2 = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty} \left[1 - \underbrace{\frac{x^2}{e^{2x}}}_{0}\right]$$

$= +\infty$.

$e^{2x} = (e^2)^x$

OSS $a^n \quad b^n \qquad a, b > 1$

$$\lim_n \frac{a^n}{b^n} = \lim_n \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$\downarrow$

x $\frac{a}{b} < 1$

$\Downarrow$

$1 < a < b \Rightarrow a^n$ è infinito d'ordine inferiore di b^n

tra ESPONENZIALI QUELLO DI ORDINE MAGGIORE È quello con la base PIÙ GRANDE

$2^n \to +\infty \qquad 3^n \to \infty \qquad \lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0 \qquad 1 < a < b$$

voglio calcolare per $k>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^k} = 0$$

$x>0$ (perché $x\to+\infty$)

$$x = e^{\log x} \qquad x^k = \left(e^{\log x}\right)^k = e^{k\log x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{k\log x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{ky}} = 0$$

$x\to+\infty \quad \log x\to+\infty$

polinomi sono infiniti di ordine maggiore dei logaritmi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^k} = 0 \qquad \forall k > 0$$

↓ Cponte

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^k} = 0$$

Altri limiti che posso dedurre

$a > 1$ $\quad k > 0$

$f.i.$

$\infty \cdot 0$

$$\lim_{x \to -\infty} x^k a^x$$

$x^k \to$

$+\infty$ se k è pari

$-\infty$ se k è dispari

$a^x \to 0$

$x \to -\infty$ $\quad -x = y \to +\infty$ $\quad x = -y$

$$\lim_{y \to +\infty} (-y)^k \cdot a^{-y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} (-y)^k \, a^{-y} =$$

$$(-y)^k = (-1)^k \cdot y^k$$

$$= \lim_{y \to +\infty} (-1)^k \frac{y^k}{a^y} = 0$$

$$\frac{y^k}{a^y} \to 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \underline{\underline{a^x}} \cdot x^k = 0}$$

$\forall a > 1$

$k > 0$

Appl. $k > 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^k}_{0^k = 0} \underbrace{\log x}_{-\infty} = 0 \quad \text{f.i.}}$$

$x \to 0^+ \quad x > 0$

$$x^k = e^{k \log x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{k \log x} \cdot \log x = \lim_{y \to -\infty} e^{ky} \cdot y = 0$$

$x \to 0^+ \quad \log x \to -\infty$

Es $\boxed{f(x) = x \lg x}$

dominio, segno, limiti, asintoti

D: $\boxed{x>0 = (0, +\infty)}$

f non ha simmetrie

segno $\quad x \lg x \geq 0 \implies \lg x \geq 0 = \lg 1$

$x \in D \Rightarrow x>0$ $\quad x > 0$

$a = \lg e^a$

$x \geq 1$

$f(1) = 0 \quad f(x) > 0 \quad x > 1$

$f(x) < 0$ se $0 < x < 1$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \underbrace{\log x} = 0$$ per confronto tra infiniti

NON HO AS. VERTICALE

posso aggiungere $x=0$ al mio dominio

ponendo $f(0) = 0$ (estendo per continuità!)

DOMINIO ESTESO $[0, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow \atop +\infty}{x} \, \underset{\downarrow \atop +\infty}{\log x} = +\infty$$ (NON HO ASINTOTI ORIZZONTALI)

Cerco as. obliquo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\log x}{\cancel{x}} = +\infty \overset{?}{=} m$$

$$\boxed{\text{NON HO AS. OBLIQUO}}$$

Es Calcolare

$$\boxed{\lim_{n} \frac{2^n}{n!} = 0}$$

$2^n \to +\infty$

$n! \to +\infty$

$n!$ = prodotto dei primi n numeri

$n \cdot (n-1)(n-2) \ldots$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} > 0$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} \to 0 = L$$

$$\| \quad a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}$$

per qualsiasi $a > 1$

$$\lim_{n} \frac{a^n}{n!} = 0$$

($n!$ è un infinito di ordine maggiore dell'esponenziale)

ORDINI DI INFINITO

① $$\lim_{n} \frac{(\lg n)^h}{n^k} = 0 \qquad \forall h>0,\ k>0$$

$$= \lim_{n} \left[\frac{\lg n}{n^{k/h}}\right]^h = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\lg x)^h}{x^k} = 0 \qquad h>0,\ k>0$$

② $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad \forall k>0,\ a>1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$$

def: ordini di infinito

$\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k \cdot a^x = 0 \quad \forall a>1 \quad k>0$$

$$\lim_{x\to0^+} \underbrace{x^k (\lg x)^h}_{=} = 0 \qquad \forall h, k>0$$

$$\lim_{x\to0^+} \Big[\underbrace{x^{k/h} (\lg x)}_{\downarrow\, 0}\Big]^h = 0^h = 0$$

Es $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty}$

(so che se $a>1$ $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$

$n^n \to +\infty$

$\underbrace{a_n = \frac{n^n}{n!}}$ $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\, n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}\, n!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$= \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \underset{L}{e} > 1$

$\Rightarrow$ criterio rapporto $\Rightarrow \lim n^n/n! = +\infty$

n^n è infinito di ordine maggiore di $n!$

$n!$ è infinito di ordine maggiore di a^n.

$\forall a > 1$.

Es determinare al variare di $a > 0$
il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log n)^4 + n^2 + a^n - 4^n}{n 3^n + 5^n + n^5 \cos(n)}$$

Studio separatamente NUMERATORE e DENOMINATORE e per ciascuno raccolgo a fattor comune infinito di $\underline{\text{ordine MAGGIORE}}$

DENOMINATORE

$$n\,3^n + 5^n + \underbrace{n^5 \cos n}$$

$$\frac{n\,3^n}{5^n} \xrightarrow{?} 0 \qquad \frac{n \cdot 3^n}{5^n} = n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n} \to 0$$

5^n è infinito di ordine maggiore

$$= 5^n \left[\frac{n\,3^n}{5^n} + \underline{\underline{1}} + \frac{n^5 \cos n}{5^n} \right]$$

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$\frac{n\,3^n}{5^n} \to 0$ $\qquad$ $\frac{n^5 \cos n}{5^n} \to 0$

$$-\frac{n^5}{5^n} \leq \frac{n^5}{5^n} \cos n \leq \frac{n^5}{5^n}$$

NUMERATORE

$$(\lg n)^4 + n^2 + a^n - 4^n$$

SE $a > 4$ raccolgo a^n

$$a^n\left[\frac{(\lg n)^4}{a^n} + \frac{n^2}{a^n} + 1 - \frac{4^n}{a^n}\right]$$

$$\frac{4^n}{a^n} = \left(\frac{4}{a}\right)^n \qquad \frac{4}{a} < 1 \; !$$

Se $a < 4$ raccolgo 4^n

$$4^n\left[\frac{(\lg n)^4}{4^n} + \frac{n^2}{4^n} + \frac{a^n}{4^n} - 1\right]$$

Se $a = 4$

$$(\lg n)^4 + n^2 + \cancel{4^n} - \cancel{4^n} = n^2\left[\frac{(\lg n)^4}{n^2} + 1\right]$$

se $a > 4$

$$\lim_n \frac{a^n\left[\frac{(\log n)^4}{a^n} + \frac{n^2}{a^n} + 1 - \overset{\to 1}{\frac{4^n}{a^n}}\right]}{\underset{\downarrow 1}{5^n\left[\frac{n3^n}{5^n} + 1 + \frac{n^5 \cos n}{n^5}\right]}} = \begin{cases} \text{se } a > 5 = +\infty \\ \text{se } a = 5 = 1 \\ \text{se } 4 < a < 5 = 0 \end{cases}$$

se $a < 4$

$$\lim_n \frac{4^n\left[\overset{\to -1}{\frac{(\log n)^4}{4^n} + \frac{n^2}{4^n} + \frac{a^n}{4^n} - 1}\right]}{5^n\left[\underset{\to 1}{\frac{n3^n}{5^n} + 1 + \frac{n^5 \cos n}{n^5}}\right]} = 0$$

$a = 4$

$$\lim_n \frac{n^2}{5^n}\frac{[\dots]}{[\dots]} = 0$$

$a > 5 = +\infty$

$a = 5 \quad 1$

$4 \leq a < 5 \quad 0$

Es $\quad f(x) = (1-3x)^{2x}$

(SE ESPONENTE POTENZA E' INCOGNITO — CIOE' VARIA — BASE > 0)

det dominio, segno, simmetrie, limiti asintoti.

$$a^b = e^{b \lg a}$$

$$\boxed{(1-3x)^{2x} = e^{2x \lg(1-3x)}}$$

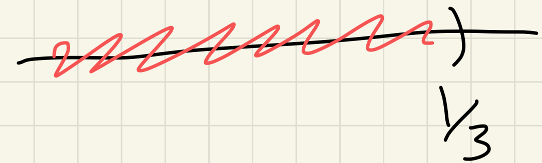
DOMINIO $\quad 1-3x > 0 \qquad 3x < 1 \qquad x < \frac{1}{3}$

$$D = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$$

NON HA SIMMETRIE

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in D.$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} e^{\overset{\to\frac{2}{3}}{2x}\,\underset{\to -\infty}{\log\left(\underset{\to 0^+}{1-3x}\right)}} = 0$$

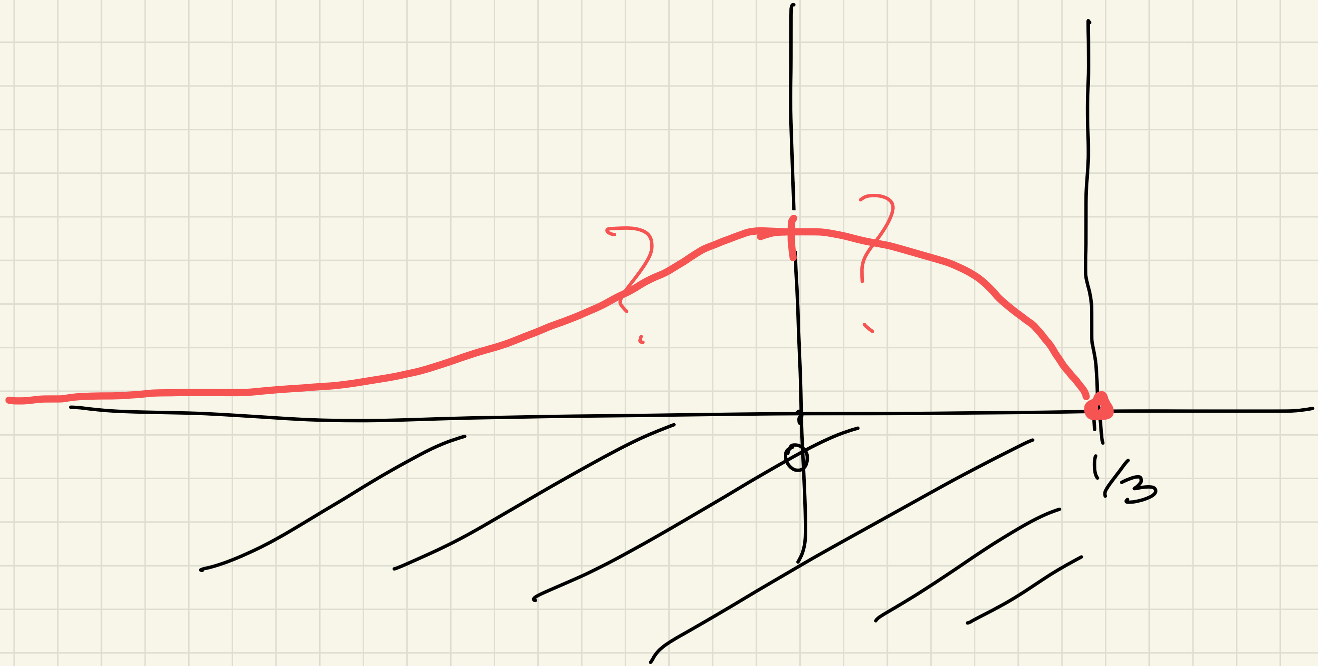


$x = \frac{1}{3}$ può essere aggiunto al dominio

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ $\quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ ESTENSIONE PER CONT.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\overset{\to-\infty}{2x}\cdot\underset{\to+\infty}{\log\left(\underset{\to+\infty}{1-3x}\right)}} = 0$$

$y = 0$ è ASINTOTO ORIZZONTALE a $-\infty$ della funzione


0
1/3

Es $f(x) = (1-3x)^{\frac{2}{x}} = \underbrace{e^{\frac{2}{x}\log(1-3x)}}$

$D = \begin{cases} (1-3x)>0 & 3x<1 \quad x<\frac{1}{3} \\ x\neq 0 & x=0 \end{cases}$

$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)$ $f>0 \quad \forall x\in D$

$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} e^{\frac{2}{x}\cdot\log(1-3x)}$ $\frac{2}{x}\to 6$, $\log(1-3x)\to -\infty$ $= 0$

aggiungo $\frac{1}{3}$ al dom.

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{1}{x}}\right]^2 =$

$$\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0} \left[(1-3x)^{\frac{1}{x}}\right]^2 = \left[e^{-3}\right]^2 = e^{-6}$$

posso aggiungere $x=0$ al dominio

ponendo $f(0) = e^{-6}$

$D = (-\infty, \frac{1}{3}]$

$f(0) = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

$f(\frac{1}{3}) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2}{x}\cdot\log(1-3x)} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2\log(1-3x)}{x}}$$

$$\frac{2\log(1-3x)}{x} \to 0$$

$$= e^{0} = 1$$

$y = 1$ AS. ORIZZ a $-\infty$