Esercitazione — Segnali e sistemi nel dominio del Tempo

Ex 1 Calcolare la convoluzione tra due gradini; poi mostrare per induzione che la convoluzione tra n gradini unitari è $V_n = \frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Poniamo $V_0(t) = u(t)$ e $V_n(t) = u * V_{n-1}(t)$ $\forall n \geq 1$

Calcoliamo esplicitamente $V_1 = u * V_0 = u * u$

$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{+\infty} u(t-\tau)\, d\tau$$

abbiamo usato il trucco della funzione indicatrice: $u(\tau)$ è indicatrice di $\tau \in (0, +\infty)$

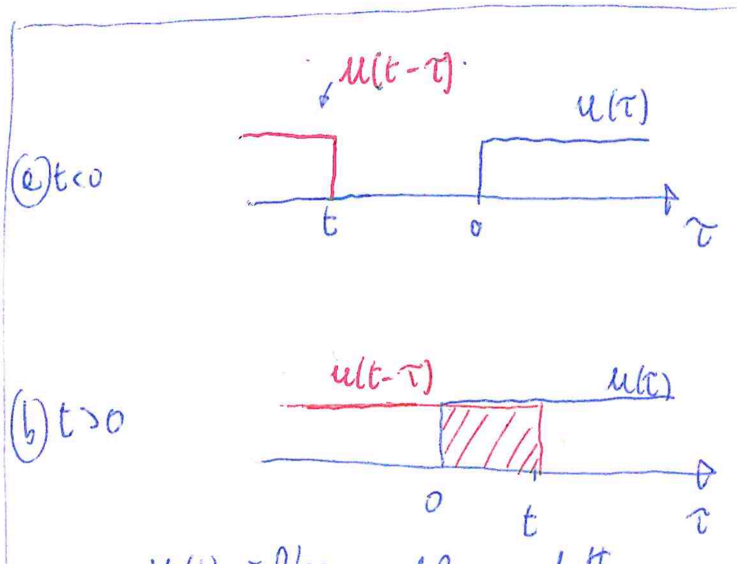
Ora, per $\tau > 0$, l'argomento dell'integranda $t - \tau$ è non negativo se e solo se $t > 0$.

(a) Quindi per $t<0$ e $\tau>0$, $u(t-\tau) = 0 \Rightarrow V_1(t) = 0$

(b) Invece, per $t>0$, $u(t-\tau) = 1 \Leftrightarrow 0<\tau<t$. Si ha allora

$$\forall t>0, \quad V_1(t) = \int_0^t d\tau = t$$

Quindi $V_1(t) = t \cdot u(t)$



$V_1(t)$ è l'area del prodotto

Calcoliamo ora $v_n(t)$ supponendo che $v_{n-1}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$

Abbiamo:

$$v_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n-1}(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

Esattamente come prima, se $t<0$, siccome l'intervallo d'integrazione è $\tau \in (0, +\infty)$, l'integranda vale $\emptyset$ in tutto tale intervallo.

Se invece $t>0$, basta integrare su $0<t<\tau$ perché su tale intervallo $u(t-\tau)>0$

$$v_n(t) = \int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\, d\tau = \left[\frac{\tau^n}{n!}\right]_0^t = \frac{t^n}{n!} \qquad \forall\, t>0$$

Quindi $v_n(t) = \frac{t^n}{n!} u(t)$ CVD

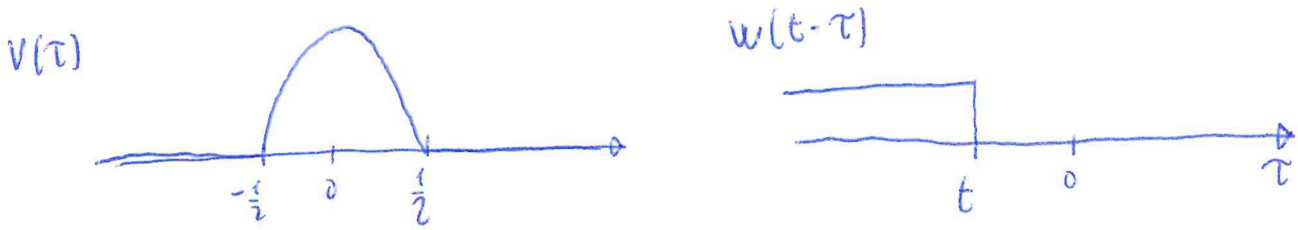
Ex. 2 Calcolare la convoluzione $x = v * w$ dove

$v(t) = \cos \pi t \cdot \text{rect}(t)$ e $w(t) = u(t)$

Svolgimento

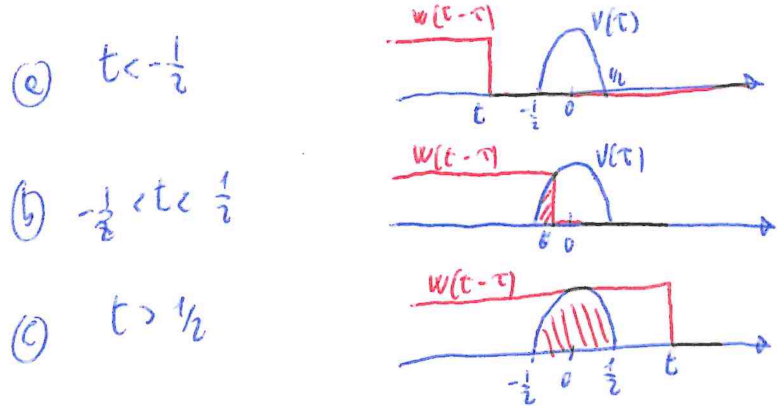
Come al solito, Tracciamo $v(\tau)$ e $w(t-\tau)$ per capire quali intervalli di valori di t dobbiamo considerare

$\cos \pi t$ è periodico di periodo 2. La moltiplicazione per il rect "seleziona" il semiperiodo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



È chiaro che, se $t < -\frac{1}{2}$, $v(\tau) \cdot w(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau$

Sarà interessante vedere che succede per $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ e per $t > 1/2$



Come al solito, l'approccio grafico non è strettamente necessario, ma aiuta a capire i calcoli

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\, w(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\tau) \cos \pi\tau \; u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi\tau \;\; u(t-\tau)\, d\tau$$

Abbiamo usato il trucco della funzione indicatrice

$\mathrm{rect}(\tau)$ è indicatrice di $\tau \in (-1/2, 1/2)$

Il punto è capire, a seconda dei valori di t,

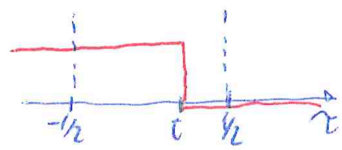
quanto vale $u(t-\tau)$ per $\tau \in (-1/2, \frac{1}{2})$

Osserviamo che $u(t-\tau) = 1 \iff t > \tau$

Se $t < -\frac{1}{2}$, ciò non accade per nessun $\tau \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

quindi l'integrale è nullo:

$\forall t < -\frac{1}{2}$, $x(t) = 0$



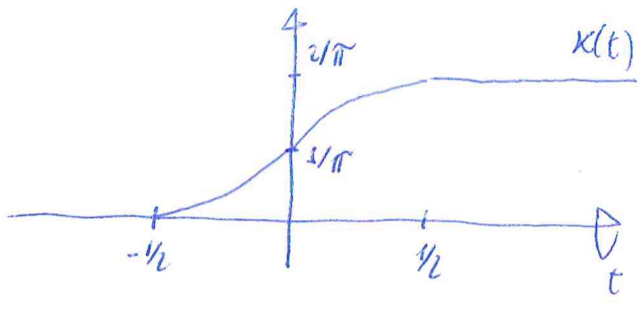
Invece, se $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$, $u(t-\tau) = 1 \iff -\frac{1}{2} < \tau < t$

$\forall t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x(t) = \int_{-1/2}^{t} \cos \pi\tau \, d\tau = \left[\frac{\sin \pi\tau}{\pi}\right]_{-1/2}^{t} = \frac{\sin \pi t + 1}{\pi}$

Infine, se $t > \frac{1}{2}$, $u(t-\tau) = 1 \;\; \forall \tau \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, quindi

$x(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi\tau \, d\tau = \left[\frac{\sin \pi\tau}{\pi}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{\pi}$

Quindi $x(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\pi}(1 + \sin \pi t) & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\pi} & t > \frac{1}{2} \end{cases}$

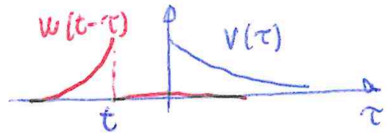


Ex 3

Calcolare la convoluzione tra $v(t) = e^{-at} u(t)$ e $w(t) = e^{-bt} u(t)$, con $a>0$, $b>0$,

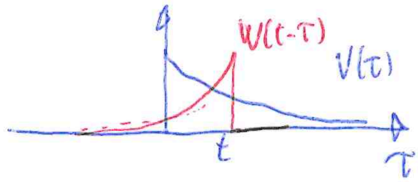
Abbiamo $x = v * w$

(a) $t<0$



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau} u(\tau)\, e^{-b(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau$$

(b) $t>0$



Come per l'ex 1, se $t<0$ l'integrando è nullo

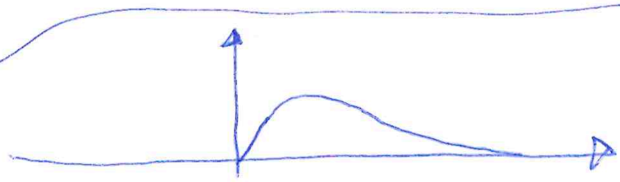
Se $t>0$, l'integrale può essere calcolato tra 0 e t

se $t>0$ $\quad x(t) = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau = e^{-bt} \int_0^t e^{-(a-b)\tau} d\tau$

se $a=b$, $\quad x(t) = e^{-bt} \cdot t \cdot u(t)$

se $a \neq t$, per $t>0$ $\quad x(t) = e^{-bt} \left[\dfrac{e^{-(a-b)\tau}}{-(a-b)} \right]_0^t = \dfrac{e^{-bt} \cdot (e^{-at} \cdot e^{bt} - 1)}{b-a}$

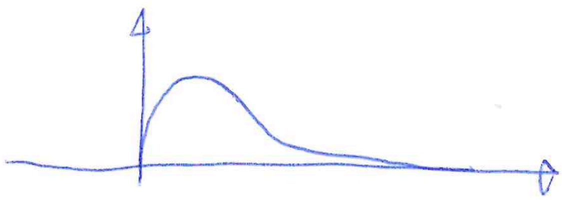
$$= \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$



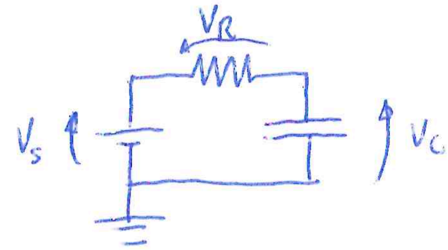
Quindi:

$a=b \Rightarrow \quad x(t) = t e^{-at} u(t)$

$a \neq b \Rightarrow \quad x(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} u(t)$



Ex 6 Studio di un circuito RC



Consideriamo un circuito RC che all'istante $t=0$ ha il condensatore "scarico": $V_C = 0$

Supponiamo di applicare una tensione $V_S(t)$ e calcoliamo l'andamento corrispondente di $V_C(t)$

Dalla teoria dei circuiti si ha facilmente:

Legge di Kirchhoff: $V_S = V_R + V_C$

Equazione resistore $V_R = R\,i$

Equazione capacitore $i = C\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_R = RC\frac{dV_C}{dt}$

Quindi $V_S = V_C + RC\frac{dV_C}{dt}$

Poniamo $RC > 0$, sia $V_S = x(t)$ ("ingresso") e

$V_C = y(t)$ ("uscita")

Il sistema è espresso in forma implicita

$$\frac{1}{\alpha}y' + y = x \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D[y] + \alpha y = \alpha x \quad (1)}$$

È un equazione differenziale ordinaria (cioè senza derivate parziali) lineare e a coefficienti costanti.

Con la condizione $y(0) = 0$ Tale equazione stabilisce un LTI

Infatti tale sistema ammette una ed una sola soluzione

Dal punto di vista fisico è perfettamente chiaro: a seconda della tensione applicata $x(t)$, otterrò uno ed un solo andamento di $y(t)$, una volta che le condizioni iniziali $y(0)=0$ sono fissate. Anche matematicamente ciò ha senso

Per provare che si tratta di un LTI osserviamo che, usando la notazione $y = S[x] \Leftrightarrow D[y] + \alpha y = \alpha x$, $y(0)=$

posto $y_1 = S[x_1]$ e $y_2 = S[x_2]$, si ha

$$D[k_1 y_1] + \alpha k_1 y_1 = k_1 \left(D[y_1] + \alpha y_1 \right) = k_1 x_1$$

$$D[k_2 y_2] + \alpha k_2 y_2 = \qquad\qquad = k_2 x_2$$

$$D[k_1 y_1] + \alpha k_1 y_1 + D[k_2 y_2] + k_2 \alpha y_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

$$D[k_1 y_1 + k_2 y_2] + \alpha(k_1 y_1 + k_2 y_2) = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

cioè $k_1 y_1 + k_2 y_2 = S[k_1 x_1 + k_2 x_2]$

Ciò prova la linearità

Per la tempo invarianza, cominciamo con l'osservare che, per ogni regola f, $D[\mathcal{U}_\beta[f]] = \mathcal{U}_\beta[D[f]]$ (è la regola che $\frac{d}{dt} f(t-\beta) = f'(t-\beta)$)

Allora, se $y = S[x]$, abbiamo

$$D[\mathcal{U}_\beta(y)] + \alpha\,\mathcal{U}_\beta(y) = \mathcal{U}_\beta[D(y)] + \alpha\,\mathcal{U}_\beta(y) =$$

$$\mathcal{U}_\beta[D[y] + \alpha y] = \mathcal{U}_\beta[x]$$

e quindi $S[\mathcal{U}_\beta[x]] = \mathcal{U}_\beta S[x]$ cioè S è T.I.

In conclusione, il sistema RC (con condizioni iniziale) è un LTI

Sarebbe allora interessante calcolarne la RI., ma dalla (1) non è facile. Invece è facile calcolare la RF.

Ricordiamo che, se $x(t) = e^{j\omega t}$, allora $y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$ purché il sistema sia stabile, il che per il momento diamo per vero (sarà dimostrato nella parte del corso dedicato alla Trasformata di Laplace)

Allora $D[y](t) = j\omega H(\omega)e^{j\omega t}$ e quindi

$$Dy + \alpha y = \alpha x \iff j\omega H(\omega)e^{j\omega t} + \alpha H(\omega)e^{j\omega t} = \alpha e^{j\omega t}$$

$$\iff H(\omega)(\alpha + j\omega)e^{j\omega t} = \alpha e^{j\omega t} \iff H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

Abbiamo già visto che, se $h_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ allora $H_1(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$

Per linearità possiamo concludere che la risposta impulsiva è

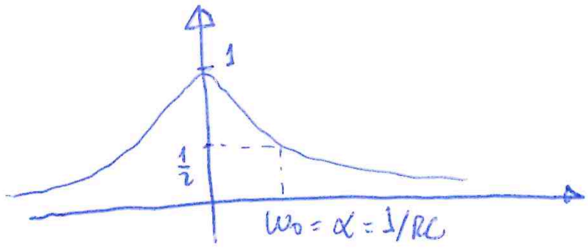
$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$$

Studio della RF

Siccome $H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$, allora $|H(\omega)|^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$

L'andamento della risposta in potenza è caratterizzato da:

- $|H(\omega)|^2$ è una funzione pari
- Il massimo è in 0: $|H(0)|^2 = 1$
- $\lim_{\omega \to +\infty} |H(\omega)|^2 = 0$



- la banda a 3 dB è $(0, \omega_0)$ con $\omega_0 = \alpha$. Infatti

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2}$$

Ricordiamo: all'interno della banda a 3dB ci sono le frequenze (pulsazioni) di sinusoidi che, poste all'ingresso del sistema producono in uscita un segnale che ha una potenza $\geq$ alla metà della potenza dell'ingresso

Siccome il max di $|H(\omega)|^2$ è in zero, il sistema è un passa-basso

Osserviamo che al crescere di α il sistema ha una banda a 3dB sempre più grande, quindi è sempre meno selettivo in frequenza.

Per $\omega \to +\infty$ $|H(\omega)| \to 0$ quindi le alte frequenze sono fortemente attenuate

Risposta indiciale

La risposta indiciale di un sistema è la risposta all'ingresso gradino unitario. Indicato con s, si ha:

$$s(t) = h * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

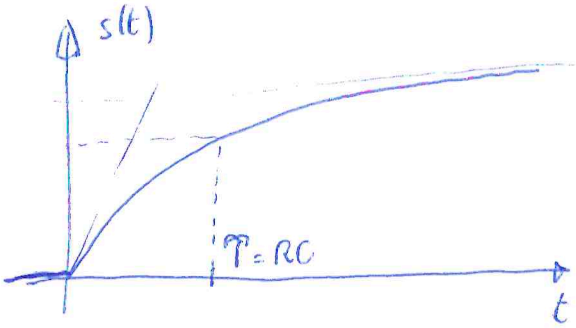
Da cui segue $h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$

In questo caso particolare, $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$ e

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha e^{-\alpha\tau} u(\tau)\, d\tau \qquad \text{Se } t<0, \quad s(t)=0$$

$$\forall t>0, \quad s(t) = \int_{0}^{t} \alpha e^{-\alpha\tau} d\tau = \left[-e^{-\alpha\tau}\right]_0^t = 1 - e^{-\alpha t}$$

Quindi $s(t) = (1-e^{-\alpha t})\, u(t)$



Osserviamo che il parametro α influenza la velocità con cui la risposta indiciale arriva a regime

Infatti $s'(0^+) = h(0^+) = \alpha$

Inoltre, posto $T = 1/\alpha = RC$, si ha

$$s(T) = 1 - e^{-\alpha/\alpha} = 1 - 1/e \approx 0.63$$

Quindi $T = 1/\alpha$ è il tempo necessario per raggiungere il 63% del valore di regime

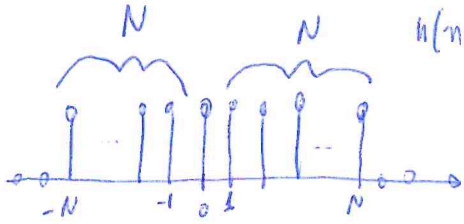
Al crescere di α il sistema è sempre più "veloce" ($T \to 0$ e la pendenza di $s(t)$ in 0^+ aumenta) ma sempre meno selettivo in frequenza (la banda a 3 dB cresce)

Esercizio   Media centrata $y = L[x]$

Consideriamo un sistema L.t.d., definito da $y(n) = m_{[n-N,\, n+N]}[x]$

Sappiamo che è un LTI: calcoliamone la RF

Ricordiamo che $h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{se } |n| \leq N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



o anche $h(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \delta(n-k)$

Calcoliamo la RF $\hat{h}(\omega)$. Si ha:

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{-j\omega k} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} e^{-j\omega k}$$

cioè, a parte il fattore $\frac{1}{2N+1}$, abbiamo la somma delle potenze intere di $(e^{j\omega})^k$ con k che va da $-N$ a N

Mettendo a fattore $e^{-j\omega N}$ abbiamo:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \left(e^{j\omega N} + e^{j\omega(N-1)} + \dots + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} + \dots + e^{-j\omega N} \right) =$$

$$= \frac{e^{-j\omega N}}{2N+1} \left(e^{j\omega 2N} + e^{j\omega(2N-1)} + \dots + e^{j\omega} + 1 \right)$$

$$= \frac{e^{-j\omega N}}{2N+1} \sum_{m=0}^{2N} (e^{j\omega})^m = \frac{z^{-N}}{2N+1} \sum_{m=0}^{2N} z^m$$

dove abbiamo posto $z = e^{j\omega} \neq 0$

Ora, se $z = 1$, $\sum_{m=0}^{2N} z^m = 2N+1$

Invece, se $z \neq 1$, $\sum_{m=0}^{2N} z^m = \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1}$

Notiamo anche che $e^{j\omega} = z = 1 \iff \omega = 2k\pi$

Ricordiamo che $\hat{h}(\omega)$ è periodica di periodo 2π quindi ci interessa il suo andamento in un periodo, $(-\pi, \pi)$

Per $\omega \in (-\pi, \pi)$, l'unico valore che rende $z = 1$ è $\omega = 0$

Quindi $\hat{h}(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2N+1} \cdot (2N+1) = 1$

Per $\omega \neq 0$ abbiamo:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{z^{-N}}{2N+1} \cdot \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{-N}}{2N+1} \frac{z^{\frac{2N+1}{2}} \cdot \left(z^{\frac{2N+1}{2}} - z^{-\frac{2N+1}{2}}\right)}{z^{1/2}\left(z^{1/2} - z^{-1/2}\right)} \cdot \frac{2j}{2j}$$

$$= \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{z^{\frac{2N+1}{2}} - z^{-\frac{2N+1}{2}}}{2j} \cdot \frac{2j}{z^{1/2} - z^{-1/2}}$$

Ma $\frac{z^{\alpha} - z^{-\alpha}}{2j} = \frac{e^{j\omega\alpha} - e^{-j\omega\alpha}}{2j} = \sin(\alpha\omega)$ quindi

$$\boxed{\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}} \quad (2)$$

Notiamo che $\hat{h}(\omega) \xrightarrow[\omega \to 0]{} \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{2N+1}{1} = 1 = \hat{h}(0)$

Quindi $\hat{h}$ è continua. Per semplicità useremo l'espressione (2) anche per $\omega = 0$, intendendo il prolungamento per continuità

Tracciamo l'andamento approssimativo di $|\hat{h}(\omega)|$ in $\omega \in (-\pi, \pi)$

Osserviamo che $\hat{h}(0) = 1$

Il denominatore si annulla solo per $\omega = 0$

Quindi gli zeri di $|\hat{h}|$ sono gli zeri del numeratore, tranne $\omega = 0$

Il numeratore è $\left| \operatorname{sen}\left(\frac{2N+1}{2} \omega\right) \right|$ che si annulla

$\forall\, \omega$ tale che $\frac{2N+1}{2} \cdot \omega = k\pi$ cioè $\omega = k \cdot \frac{2\pi}{2N+1} = k \cdot \lambda$

avendo posto $\lambda = \frac{2\pi}{2N+1}$

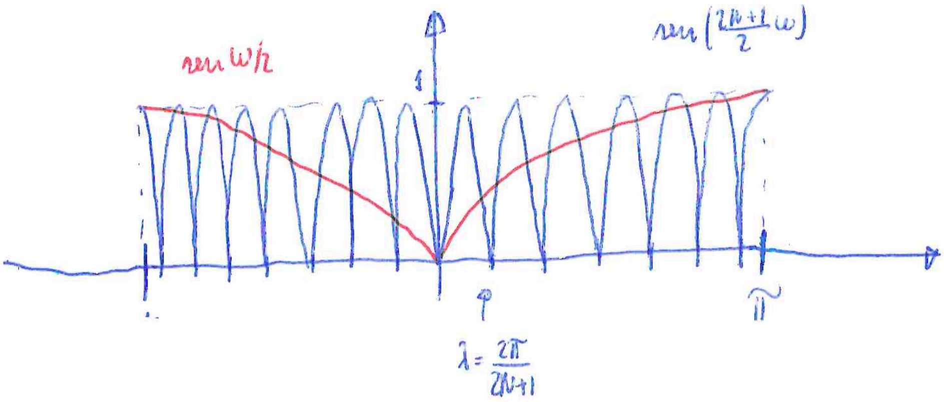
Il numeratore si annulla quindi in tutti i multipli di λ

Ci sono $2N+1$ multipli interi di λ in $-\pi, \pi$:

$$\left(-\frac{2N}{2N+1}\pi, \; -\frac{2(N-1)}{2N+1}\pi, \; \ldots \; -\frac{2\pi}{2N+1}, \; 0, \; \frac{2\pi}{2N+1} \; \ldots \; \frac{2N}{2N+1}\pi \right)$$

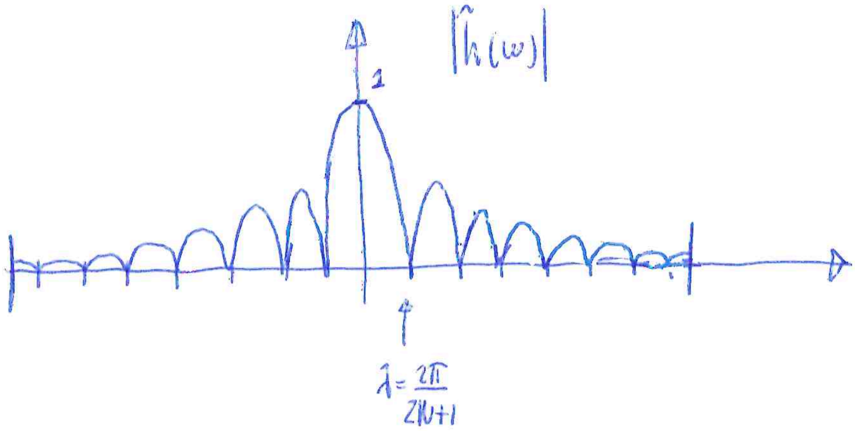
Quindi $\hat{h}(\omega)$ ha $2N$ zeri ($\omega = 0$ non è uno zero di $\hat{h}$)

Infine, per tracciare l'andamento di $|\hat{h}|$ conviene tracciare l'andamento del modulo del numeratore e del modulo del denominatore



Il denominatore, $|\sin \omega/2|$, si annulla solo in zero e vale 1 in $\pm\pi$. Per $\omega > 0$ è strettamente crescente.

Allora, per $\omega > 0$, il rapporto tra numeratore e denominatore sarà caratterizzato da lobi con "altezza" via via più piccola (perché il denominatore è sempre più grande) e "larghezza" costante ed uguale a λ. Invece il "lobo" centrale ha massima altezza ($|\hat{h}(0)| = 1$) e larghezza 2λ



Il sistema è un passa basso, ma cancella anche tutte le pulsazioni multiple di $\lambda = \frac{2\pi}{2N+1}$, cioè tutte le frequenze multiple di $\nu_0 = \frac{1}{2N+1}$

Quindi, qualunque sia il segnale x, posto $W_k(n) = e^{jk\lambda n}$

$$L[x + \sum \alpha_k W_k] = L[x] + \sum_k \alpha_k L[W_k] = L[x]$$