Successioni numeriche

Def una successione è una funzione a valori in $\mathbb{R}$ con dominio l'insieme dei numeri naturali (o un sottoinsieme infinito di numeri naturali)

es
$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto \underbrace{\sqrt[n]{n}}$$

$f(1) = 1$

$f(2) = \sqrt[2]{2} \in \mathbb{R}$

$f(3) = \sqrt[3]{3}$

$f(4) = \sqrt[4]{4}$

...

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{1}{n}$$

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$$f(x) = \lg(x^2+1)$$

per $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = a_n \qquad f(n) \Rightarrow a_n \in \mathbb{R}$$

$(a_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ è la successione che a ogni n associa $\frac{1}{n}$

Se scrivo a_n intendo il valore ~~reale~~ della successione $n \longrightarrow a_n$ nel pto n.

$\cancel{f(n)} \longrightarrow a_n$

$\boxed{\text{limite}}$

$a_n : D \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
illimitato

$\mathbb{N}$ non ha PUNTI di accum.

(per $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ posso calcolare i limiti

1) ~~nei pti x_0 che sono di accumulaz per D~~

2) ~~per $x \to -\infty$ se D è ill. inferiormente~~

3) per $x \to +\infty$ se D è illimitato superiormente.

$$\lim_{n \to +\infty} \overset{\text{"}f(n)\text{"}}{a_n} = \lim_{n} a_n$$

1) $\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$

tale che se $n > M$

$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ $\quad (a_n \approx L)$

2) $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se $\forall M > 0 \ \exists N > 0$

$\forall n > N$ allora $a_n > M$

3) $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se $\forall M > 0 \ \exists N > 0$

$n > N$ allora $a_n < -M$

Def La successione (a_n) è LIMITATA

se esiste $C>0$ $\quad \underbrace{-C < a_n < C}$ $\quad \forall n \in D \subseteq \mathbb{N}$

es. $\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad \underset{n\neq 0}{n} \longmapsto \frac{1}{n}$

è limitata $\qquad 0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$a_n = 3^n \qquad n \longrightarrow 3^n$

non è limitata $\qquad 0 < 3^n < C \quad \forall n$

$\nexists C$

Def

se $\forall n \in D \subseteq \mathbb{N}$

$a_n \leq a_{n+1}$

allora (a_n) è CRESCENTE

$a_n < a_{n+1} \quad \forall n$

$\Downarrow$

(a_n) strett. CRESCENTE

se $\overset{f(n)}{a_n} \geq \overset{f(n+1)}{\overset{\parallel}{a_{n+1}}} \quad \forall n \Rightarrow (a_n)$ è DECRESCENTE

se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \Rightarrow (a_n)$ è strett. DECRESCENTE

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strett. cresc.

$\forall x_1 < x_2 \in D$

$\Downarrow$

$f(x_1) \leq f(x_2)$, $\neq$

strett. decresc.

$\forall x_1 < x_2 \in D$

$\Downarrow$

$f(x_1) \geq f(x_2)$, $\neq$

Teorema

1) Se (a_n) è CRESCENTE allora ha sempre limite e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } (a_n) \text{ è ILLIMITATA SUPERIORM.} \\ \sup\{\underbrace{a_n,\ n\in\mathbb{N}}\} & \text{se } a_n \text{ è LIMITATA} \end{cases}$$

es. $a_n = 3^n$ è crescente $a_n = 3^n$ $a_{n+1} = 3^{n+1}$

$$a_{n+1} = \underset{\substack{\parallel \\ 3\cdot 3^n}}{3^{n+1}} > 3^n = a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$$

2) se a_n è decrescente essa ammette sempre limite e

$$\lim_n a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } (a_n) \text{ è inferiormente illimitata} \\ \inf\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

es: $a_n = \frac{1}{n}$ → decrescente

$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

$\inf\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0$

$\lim_n \frac{1}{n} = 0$

Applicazione importante

$q \in \mathbb{R}$ $\quad q \neq 0$ $\quad$ FISSATO

$\boxed{\text{successione}}$

$$\underset{\mathbb{N}}{n} \longmapsto q^n$$

$$n \longmapsto q^n \in \mathbb{R}$$

$$0 \longmapsto q^0 = 1$$

$$1 \longmapsto q^1$$

$$2 \longmapsto q^2$$

$$3 \longmapsto q^3$$

[voglio calcolare per $q \in \mathbb{R}$ fissato

$$\lim_{n \to +\infty} q^n .$$]

① $q = 1$ $\quad n \longrightarrow 1^n = 1$ $\quad \lim_n 1^n = 1$

$q = 0$ $\quad n \longmapsto 0^n = 0$ $\quad \lim_n 0^n = 0$

② $q > 1$

$$\underset{a_{n+1}}{q^{n+1}} = q^n \cdot q > q^n \cdot 1 = \underset{a_n}{q^n}$$

successione (q^n) è crescente strett.

non è limitata dall'alto perché

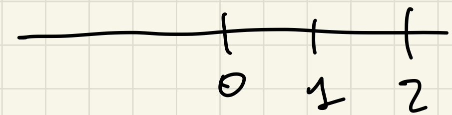
$\nexists\, C > 0 \quad q^n < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left[\lim_n q^n = +\infty\right]$$

② $0<q<1$ $\qquad 0^n < q^n < 1^n$

$$a_{n+1} = q^{n+1} = q^n \cdot q \leq q^n \cdot 1 = a_n$$

(q^n) è strett decrescente
e $0 < q^n \leq 1$ $\forall n$ limitata



$$\lim_n q^n = \inf\{q^n, n \in \mathbb{N}\} = 0$$

se $q \in [0,1) \Longrightarrow \boxed{\lim_n q^n = 0}$

③ $q<0$ $\qquad q=-|q|$ $\qquad q=-3 = -|-3|$

$$q^n = (-|q|)^n = \underbrace{(-1)^n}\,\underbrace{|q|^n}$$

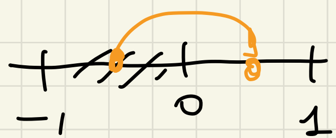
$$\boxed{|q|>0}$$

se $q=-1$ $\qquad (-1)^n$ NON HA LIMITE

~~se~~ n è pari $\quad (-1)^n = 1$

dispari $\quad (-1)^n = -1$

se $-1<q<0$



$0<|q|<1$

$$-|q|^n \le q^n = (-1)^n\,|q|^n \le |q|^n$$

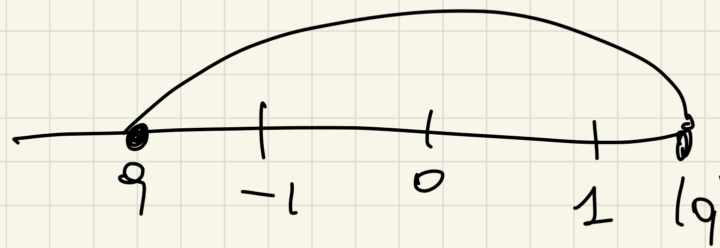
$|q|^n \to 0 \qquad 0<|q|<1$

$$\underbrace{-|q|^n}_{\to 0} \le q^n = (-1)^n |q|^n \le \underbrace{|q|^n}_{\to 0}$$

se $\quad -1 < q < 0 \quad \Rightarrow 0 < |q| < 1 \qquad |q|^n \to 0$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

se $\quad q < -1 \quad \Rightarrow \quad |q| > 1$

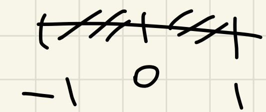


$$|q|^n \to +\infty$$

$$q^n = (-1)^n \underbrace{|q|^n}_{\to +\infty}$$

NON HA LIMITE

$$\lim_{n} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{NON ESISTE LIMITE} & q \leq -1 \end{cases}$$



Teorema "ponte"

(a_n) successione tale che $\underline{\underline{a_n = f(n)}}$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(es $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow a_n = f(n)$ $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

$a_n = 3^n \longrightarrow a_n = f(n)$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 3^x$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)}$$

se $\forall n \quad f(n) = a_n$

Noi diciamo che a_n è successione esiste una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(n) = a_n.$$

es $\quad a_n = n! \qquad a_{n+1} = (n+1)\, a_n$

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2$

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \cdot 1 = 2$

$3!$

$a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \qquad a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \ldots = n \cdot (n-1)!$$

PRODOTTO DEI PRIMI n numeri naturali.

$(n!)$ è successione crescente

$$a_{n+1} = (n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots = \underline{(n+1)}\ \underline{n!} = (n+1)\, a_n > a_n$$

$$\lim_{n} n! = +\infty$$

Ricordiamo che

$$\underset{\text{Nepero}}{\underset{\downarrow}{e}} = \sup\left\{ \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{crescente}} , \ \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}$$

teorema ponte

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ $\qquad$ $a > 0$ fissato

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a} = \lim_{y \to +\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}}\right]^{a} = e^{a}$$

$\frac{x}{a} \to +\infty$ perché $x \to +\infty$ e $a > 0$ fissato

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \;\to\; \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad a > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + a x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$x \to 0^+ \quad \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^y = e^a$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}^{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad ?$$

$x \to -\infty$

$-x \to -(-\infty) = +\infty$

$x = -(-x) = -y$

$-x = y$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{-(-x)}\right)^{-(-x)}}_{} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}}_{}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$y = -x$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{(y-1)}}_{\to e}\cdot\frac{y}{y-1} = e$$

$$\frac{y}{y-1} = \frac{\cancel{y}\,1}{\cancel{y}\left(1-\frac{1}{y}\right)} \to 1$$

$y\to+\infty \quad y-1\to+\infty$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a} \qquad \begin{matrix} a>0 \\ a<0 \end{matrix}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \qquad \forall a\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^a$$

$$\frac{1}{x}\to +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^a$$

$$\frac{1}{x}\to -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+ax)}{x} = a}$$ form. ind $\frac{0}{0}$

$a \neq 0$

$\lg(1+ax)$ è ben def. se $1+ax>0$

$a \lg b = \lg b^a$ prop log

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lg(1+ax) = \lim_{x\to 0} \lg \underbrace{(1+ax)^{\frac{1}{x}}}_{e^a}$$

$$= \lg e^a = a$$

(8)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$a=1$

$$x = \log(e^x) = \log(1 + e^x - 1)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\log(1+e^x-1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

$x \to 0 \qquad e^x - 1 \to e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$