Analisi Matematica 1

Settore dell'Informazione   Anno Accademico 778°

(Proff. B. Bianchini, O. Stefani)

Esercitazione n. 9

1. Calcolare il limite

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-6n+1}{n^3+3n};\qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{7n^5+n^4-2n^2}{6n^5-n^3+3};\qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$$

$$\text{(d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n},\qquad \text{(e)},\ \lim_{n\to\infty}(5^n-3^n);\qquad \text{(f)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{3^n+\pi};$$

$$\text{(g)}\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n);\qquad \text{(h)}\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1});\qquad \text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n-1}-n);$$

$$\text{(j)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{7^n-3^n}{9^n-5^n};\qquad \text{(l)}\ \lim_{n\to\infty}(2^{n+1}-2^{\sqrt{n^2-1}});\qquad \text{(m)}\ \lim_{n\to\infty}(5^{n-1}-5^{\sqrt{n^2+1}});$$

$$\text{(n)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n-n^3}{3n^3+\arctan\ n};\qquad \text{(o)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cosh^2\frac{1}{n}+3n^4}{n^4+\cos\ n^3};\qquad \text{(p)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\cos\frac{1}{n}-n}{\tanh\ n-3n^2+2};$$

$$\text{(q)}\ \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right);\qquad \text{(r)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)n^3;\qquad \text{(s)}\ \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n^2}\left(\tan\frac{1}{n^2}-\sin\frac{1}{n}\right)n.$$

2. Dimostrare che:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} n! = +\infty;\qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty\ (a>1);\qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = +\infty\ (a>1);$$

$$\text{(d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} = +\infty\ (a>1, k\in\mathbb{N});\qquad \text{(e)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0;\qquad \text{(f)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0.$$

3. Sia (a_n) una successione, dimostrare che sono equivalenti le seguenti proposizioni:
   (a) L è valore di aderenza per (a_n) .
   (b) In ogni intorno di L cadono a_n per infiniti valori dell'indice n.
   (c) L è un termine della successione che si ripete infinite volte oppure è punto di accumulazione per $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$.
4. Sia (a_n) una successione, detto I l'insieme dei suoi valori di aderenza, dimostrare che I è chiuso .
5. Sia a un valore di aderenza per (a_n) ; b un valore di aderenza per (b_n) . E' vero che $a+b$ è valore di aderenza per la successione (c_n) con $c_n = a_n + b_n, \forall n\in\mathbb{N}$.
6. Sia (a_n) una successione convergente ad a; b un valore di aderenza per (b_n) . E' vero che $a+b$ è valore di aderenza per la successione (c_n) con $c_n = a_n + b_n, \forall n\in\mathbb{N}$.
7. Sia (a_n) una successione a termini positivi, e sia a un suo valore di aderenza. E' vero che la successione $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ammette $\frac{1}{a}$ come valore di aderenza?
8. Sia (a_n) una successione a termini diversi da zero e priva divalori di aderenza. E' vero che la successione $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ammette necessariamente un valore di aderenza?