

Analisi Matematica 1

Settore dell'Informazione Anno Accademico 778°

(Proff. B. Bianchini, O. Stefani)

Esercitazione n. 8

1. Verificare, mediante la definizione di limite, che

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3) = 5 ; \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1 ; \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 - x} = -\infty .$$

2. (2004 11 06) Utilizzando la definizione , verificare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x+1}) = +\infty .$$

3. Sia $f(x) = \text{sign}(x^2 - x)$. Discutere l'esistenza dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) .$$

e studiare la continuità della funzione.

4. Dire se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan x}{x} .$$

5. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N} \} \\ 1 & \text{per } x = \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N} , \end{cases}$$

(a) si dica se esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

(b) si dica per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} f(x)$.

6. Dire per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} D(x) \cdot \sin x .$$

(Per la definizione di $D(x)$ vedi es. 3.2.1.1. 4 pag. 258)

7. Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{x - x^2}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - x + 5}{-x^3 + 9}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{2x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{4x}, & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{1 - x}. \end{aligned}$$

8. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{\sin x} & \text{per } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{per } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

è continua.

9. Esiste il limite :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot D(x) .$$

10. (2003 11 08) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{per } x \neq \pi/3 \\ \sqrt{3} & \text{per } x = \pi/3, \end{cases}$$

(a) si dica dove f é continua ,

(b) (fra 15 giorni) si dica dove f é derivabile , dove esiste , se ne calcoli la derivata .

11. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ x^4 & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

(a) si dica dove f é continua ,

(b) (fra 15 giorni) si dica dove f é derivabile e , dove esiste, se ne calcoli la derivata .

12. Determinare i valori del parametro reale α per cui le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) & x > 0 \\ 2x^2 + 3 & x \leq 0 \end{cases}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{\alpha x - 1} & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 1. \end{cases}$$