RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN LTI t.d.

Teorema della risposta in frequenza (t.d.)

Sia L un LTI stabile con risposta impulsiva $h(n)$

Se in ingresso a L c'è un segnale esp. imm. puro $x(n) = e^{j\omega n}$

l'uscita sarà proporzionale all'ingresso : $y = L[x] = C \cdot x$

e la costante di proporzionalità dipende da ω e da y:

$$C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

DIM. Se $x(n) = e^{j\omega n}$, $x \in \ell^\infty$; se L stabile, $h \in \ell^1$

Quindi, posto $y = h * x$, $y \in \ell^\infty$

Calcoliamo $y(n)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k} \cdot e^{j\omega n} = C e^{j\omega n} = C x(n)$$

Avendo posto $C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}$

Possiamo definire il segnale t.c. $\hat{h}(\omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}$

Osserviamo che $|\hat{h}(\omega)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k) \cdot e^{-j\omega k}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \cdot |e^{-j\omega k}| =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \|h\|_1 < +\infty \text{ per sistemi stabili}$$

Il segnale $\hat{h}(\omega)$ è allora chiamato

Risposta in frequenza del sistema

Quindi il Teorema della risposta in frequenza afferma che,

se L è un LTI t.d. stabile di R.I. $h(n)$,

$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad L[e^{j\omega n}] = \hat{h}(\omega) e^{j\omega n}$

dove $\hat{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{j\omega n}$

Quindi $\hat{h}(\omega)$ ci dice come il sistema di R.I. h "tratta" la pulsazione ω

Osserviamo che $\hat{h}$ è somma di funzioni periodiche di periodo 2π, quindi è anch'esso periodico di periodo 2π

D'altra parte, siccome $e^{j\omega n} = e^{j(\omega + 2k\pi)n} \quad \forall \omega, n e k$

si ha $L[e^{j\omega n}] = L[e^{j(\omega + 2k\pi)n}]$

$$\hat{h}(\omega) e^{j\omega n} = \hat{h}(\omega + 2k\pi) e^{j(\omega + 2k\pi)n} = \hat{h}(\omega + 2k\pi) e^{j\omega n}$$

$\Rightarrow \hat{h}(\omega) = \hat{h}(\omega + 2k\pi)$ (possiamo semplificare $e^{j\omega n}$ perché $|e^{j\omega n}| = 1 \neq 0 \quad \forall n, \omega$)

Corollario Risposta a un esp. imm. puro in forma canonica

Se L è un LTI stabile, $x(n) = A e^{j(\omega n + \varphi)}$ e $y = L[x]$

allora
$$y(n) = A_1 e^{j(\omega n + \varphi_1)}$$

con $A_1 = A \cdot |h(\omega)|$, $\varphi_1 = \varphi + \angle h(\omega)$

La dimostrazione è semplice:

$$x(n) = A e^{j(\omega n + \varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega n}$$ costante per imm. puro

$$\Rightarrow \quad y(n) = A e^{j\varphi}\, \hat{h}(\omega)\, e^{j\omega n} = A e^{j\varphi} \cdot |\hat{h}(\omega)|\, e^{j\angle \hat{h}(\omega)}\, e^{j\omega n}$$

$$= A \cdot |\hat{h}(\omega)| \cdot \exp[j(\omega n + \varphi + \angle \hat{h}(\omega))]$$ C.V.D.

Quindi è facile vedere come un LTI "tratta" gli esp. imm. puri in f.c.: l'ampiezza è moltiplicata per $|\hat{h}(\omega)|$ e la fase traslata di $\angle \hat{h}(\omega)$

Per questo motivo è interessante tracciare $|\hat{h}(\omega)|$, detto <u>risposta in ampiezza</u> del sistema: esso ci dice

se ci sono pulsazioni "attenuate" (per le quali $|\hat{h}(\omega)| < 1$)

se ci sono pulsazioni "cancellate" (per le quali $|\hat{h}(\omega)| = 0$)

se ci sono pulsazioni "amplificate" (per le quali $|\hat{h}(\omega)| > 1$)

<u>Esempio</u> Risposta in frequenza di un sistema AR(1)

Sia dato un LTI caratterizzato da $y(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} a^m x(n-m)$

con $a \in]-1, 1[$

1) Calcolare RI e RF, tracciare la risposta in ampiezza

2) Calcolare l'uscita quando l'ingresso è $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3} n}$

Si tratta di un sistema AR(1), sappiamo che la RI è $h(n) = a^n u(n)$

Siccome $|a|<1$ per ipotesi, il sistema è stabile

Calcoliamo la RF

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\, e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m u(m)\, e^{-j\omega m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^m$$

È la somma di una serie geometrica di ragione $ae^{-j\omega}$ il cui modulo è $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$: c'è convergenza e

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Calcoliamo $|\hat{h}(\omega)|^2$: il quadrato serve a semplificare l'espressione, infatti evita di dover calcolare una radice. Ciò che importa è l'andamento generale del segnale quindi va bene tracciare prima $|\hat{h}|^2$ e poi dedurre l'andamento generale (massimi, minimi, supporto) di $|\hat{h}|$

Si ha che, posto $d(\omega) = |1-ae^{-j\omega}|^2$, $|\hat{h}(\omega)|^2 = 1/d(\omega)$ e

$$d(\omega) = |1-ae^{-j\omega}|^2 = |1-a\cos\omega + ja\sin\omega|^2 = (1-a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2$$

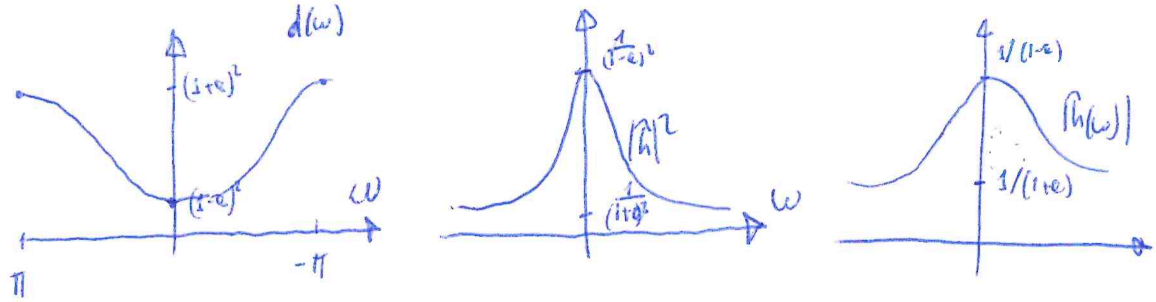
$$= 1 - 2a\cos\omega + a^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega = 1 + a^2 - 2a\cos\omega$$

Abbiamo $d(0) = 1+a^2-2a = (1-a)^2$ e $d(\pm\pi) = 1+a^2+2a = (1+a)^2$

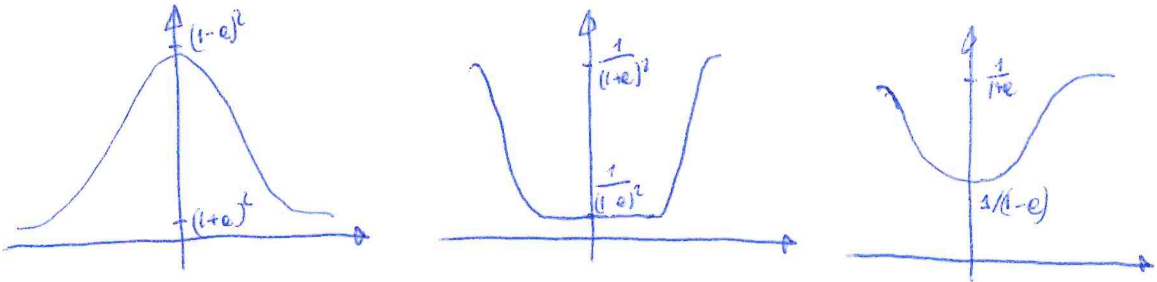
Nel mezzo l'andamento è un coseno.

Tracciamo $d(\omega)$, deduciamone $|\hat{h}(\omega)|^2 = 1/d^2(\omega)$ e $|\hat{h}(\omega)| = \sqrt{1/d^2(\omega)}$

Per $a>0$
$(1+a)^2 > (1-a)^2$



$a<0$
$(1-a)^2 > (1+a)^2$



Per $a>0$ il sistema è detto "passa basso": l'amplificazione $|\hat{h}(\omega)|$ di un esp. imm. puro è più grande per $|\omega| \to 0$

Per $a<0$ avviene il contrario: le basse "frequenze" sono attenuate e le "alte" (cioè per $|\omega| \to \pi \Leftrightarrow |\nu| \to \frac{1}{2}$) sono amplificate: è un sistema "passa-alto"

Infine, se $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n} = e^{j\omega n}$ con $\omega = \pi/3$

allora $y(n) = |\hat{h}(\omega)| \cdot e^{j(\pi/3\, n + \angle \hat{h}(\omega))}$

$\hat{h}(\omega) = \dfrac{1}{1-a(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}$ $\qquad |\hat{h}(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+a^2-a}$

la fase di $\hat{h}(\pi/3)$ non ha un espressione semplice, lasciamo $\varphi_0 = \angle \hat{h}$

$y(n) = \dfrac{1}{\sqrt{1-a+a^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{3}n + \varphi_0\right)}$

Risposta di un LTI td. reale ad ingresso sinusoidale

Sia L un LTI con risposta impulsiva reale, cioè $h(n) \in \mathbb{R} \ \forall n$. È facile vedere che tale sistema trasforma ogni segnale reale in un altro segnale reale

Se in particolare l'ingresso è una sinusoide in f.c., calcoliamo l'uscita:

$$h \text{ reale} \quad ; \qquad x(n) = A\cos(\omega n + \varphi) \qquad y = L[x]$$

Con le formule di Eulero si ha

$$x(n) = A \cdot \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega n+\varphi)} + e^{-j(\omega n+\varphi)}\right] = \frac{A}{2}e^{j\varphi}\, e^{j\omega n} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi} e^{-j\omega n}$$

Per la linearità degli LTI,

$$y(n) = \frac{1}{2}Ae^{j\varphi}\,\hat{h}(\omega)\, e^{j\omega n} + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}\,\hat{h}(\omega)\, e^{-j\omega n}$$

Siccome h è reale, $\overline{\hat{h}(\omega)} = \overline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega n} = \hat{h}(-\omega)$

Quindi $|\hat{h}(-\omega)| = |\overline{\hat{h}(\omega)}| = |\hat{h}(\omega)|$

e $\angle\hat{h}(-\omega) = -\angle\hat{h}(\omega)$

cioè $\hat{h}(-\omega) = |\hat{h}(\omega)| \cdot e^{-j\angle\hat{h}(\omega)}$

Allora $y(n) = \frac{1}{2} A|\hat{h}(\omega)| e^{j(\omega n + \varphi + \angle \hat{h}(\omega))} + \frac{1}{2} A|\hat{h}(\omega)| \cdot e^{-j(\omega n + \varphi + \angle \hat{h}(\omega))}$

$$= A\, |\hat{h}(\omega)| \cos(\omega n + \varphi + \angle \hat{h}(\omega))$$

Quindi un LTI reale trasforma una sinusoide in un altra sinusoide con la stessa frequenza; l'ampiezza viene moltiplicata per $|\hat{h}(\omega)|$ e la fase traslata di $\angle \hat{h}(\omega)$

Visto che $|\hat{h}(\omega)|$ è pari, il suo andamento tra 0 e π dà la natura passa-basso o passa-alto o "passa-banda" (quando il picco di $|\hat{h}(\omega)|$ è in $\omega_0 \neq 0$ e $\omega_0 \neq \pi$)

Un LTI non è in grado di "introdurre" nuove frequenze nell'uscita

---

Nota: Conoscendo la R.F. di un sistema LTI, possiamo facilmente (in principio) invertire il sistema quando l'ingresso è una sinusoide: basterà applicare amplificazione e sfasamento inversi.
Allora, se un segnale è espresso come combinazione lineare di sinusoidi, possiamo ancora invertire il sistema, purché $\hat{h}(\omega) \neq 0$.
Vedremo come generalizzare questo risultato

Risposta in frequenza di un LTI t.c.

Consideriamo un LTI t.c. stabile con RI h

Calcoliamo l'uscita corrispondente ad un ingresso exp. imm. puro

$x(t) = e^{j\omega t}$ $\qquad y = h * x \qquad h \in \mathcal{L}^1,\ x \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow y \in \mathcal{L}^\infty$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau}\; e^{j\omega t}$$

$$= H(\omega) \cdot x(t)$$

cioè l'uscita è proporzionale all'ingresso e la costante (rispetto a t) di proporzionalità è:

$$H(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$H(\omega)$ è detto risposta in frequenza del sistema

Siccome $h \in \mathcal{L}^1$, la convergenza di $H(\omega)$ è assicurata

Quindi $\quad y(t) = |H(\omega)| \cdot e^{j(\omega t + \angle H(\omega))}$

e, più in generale, se $x(t) = A\, e^{j(\omega t + \varphi)}$,

$$y(t) = A\, |H(\omega)| \exp\left(j(\omega t + \varphi + \angle H(\omega)\right)$$

simile al risultato ottenuto in t.d.

<u>Esempio</u> consideriamo un LTI con $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$
e con $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

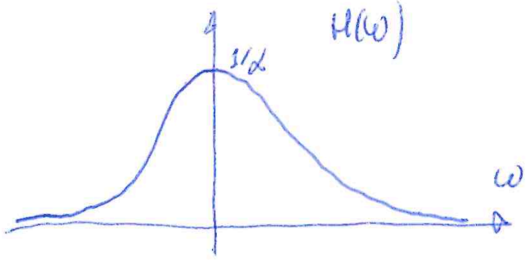
La RF di tale sistema è

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

Studiamo $|H(\omega)|$: $\quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{|\alpha+j\omega|^2} = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$

$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$ è una funzione pari, strettamente decrescente per $\omega \geq 0$; inoltre $H(0) = 1/\alpha$ e $\lim_{\omega \to \infty} |H(\omega)| = 0$



Il sistema è un "passa-basso" perché il massimo di $|H(\omega)|$ è in zero

<u>Risposta di un LTI t.c. reale ad un segnale sinusoidale t.c.</u>

se L è un LTI con $h(t)$ reale, la risposta a

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

è

$$y(t) = A \cdot |H(\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \angle H(\omega))$$

<u>DIM</u> basta osservare che $\overline{H(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{j\omega t} dt = H(-\omega)$: a questo punto la dim è formalmente identica al caso T.d.

Quindi sia nel caso t.c. e t.d., gli LTI **non** cambiano la frequenza di una sinusoide, ma ne modificano ampiezza e fase tramite il valore della R.F.

Esempio Consideriamo un LTI con R.I. $h(t) = e^{-t} u(t)$

Calcolare la risposta al segnale $x(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}\, t + \frac{\pi}{3}\right)$

Potremmo usare la convoluzione, ma è più semplice passare per la R.F.: infatti questo è un caso particolare dell'esercizio precedente con $\alpha = 1$. Si ha allora

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

e $$y(t) = \frac{1}{2}|H(\sqrt{3})| \cos\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + \angle H(\sqrt{3})\right)$$

$$H(\sqrt{3}) = \frac{1}{1 + j\sqrt{3}} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$|H(\sqrt{3})| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\angle H(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos\sqrt{3}\, t$$

LTI in regime periodico

Sia $x_{PER}(t)$ un segnale periodico e limitato ($x_{PER} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$) di periodo T

Sia L un LTI t.c. stabile con R.I. $h(t)$ e RF $H(\omega)$

Consideriamo $L[x_{PER}]$: siccome L è TI, anche tale uscita sarà periodica di periodo T, chiamiamola allora y_{PER}:

$$y_{PER} = h * x_{PER}$$

Nella pratica, ha poco senso considerare segnali periodici in senso stretto, ma piuttosto sono interessanti segnali che "cominciano" ad un certo istante, convenzionalmente posto a zero.

Ci interessa quindi studiare l'uscita del sistema quando l'ingresso è $x(t) = u(t) \cdot x_{PER}(t)$

Osserviamo allora che, essendo $u(t) = 1 - u(-t)$ ← gradino ribaltato

possiamo scrivere: $x = u \cdot x_{PER} = (1 - R[u])\, x_{PER} = x_{PER} - R[u] \cdot x_{PER}$

$$\Rightarrow y = L[x] = L[x_{PER} - R[u]\, x_{PER}] = L[x_{PER}] - L\left[R[u] \cdot x_{PER}\right]$$

$$= y_{PER} + y_{TR}$$

Dove y_{PER} è il segnale periodico $L[x_{PER}]$

mentre y_{TR} è detto "transitorio".

Mostriamo adesso che $|y_{TR}(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$: l'interpretazione è che, dopo un periodo opportuno di tempo (detto, appunto, transitorio) l'uscita y corrispondente a x_{PER} si è data unicamente dalla parte periodica $y_{PER} = L[x_{PER}]$

Calcoliamo quindi $y_{TR} = L[x_{PER} \cdot R[u]]$

$$y_{TR}(t) = h * (x_{PER} R[u])(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x_{PER}(t-\tau)\, u(\tau - t)\, d\tau$$

Siccome $u(\tau - t) \neq 0 \iff \tau > t$, l'integrale diventa:

$$y_{TR}(t) = \int_{t}^{+\infty} h(\tau)\, x_{PER}(t-\tau)\, d\tau$$

Ma $x_{PER} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |x_{PER}(t)| < M$

$$\Rightarrow |y_{TR}(t)| \leq \int_{t}^{+\infty} |h(\tau)|\,|x_{PER}(t-\tau)|\,d\tau < M\int_{t}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau =$$

$$= M \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} |h(\tau)|\,d\tau \right) = M \cdot \|h\|_1 - M\int_{-\infty}^{t} |h(\tau)|\,d\tau$$

Ma $\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} |h(\tau)|\,d\tau = \|h\|_1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} |y_{TR}(t)| \leq M\cdot\|h\|_1 - M\|h_1\| = 0$

e quindi $\lim_{t\to+\infty} |y_{TR}(t)| = 0$

Banda a 3dB di un LTI

Sia $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ l'ingresso di un LTI reale

L'uscita è $y(t) = A \cdot |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi + \angle H(\omega_0))$

la potenza di x è $A^2/2$

la potenza di y è $\dfrac{A^2|H(\omega_0)|^2}{2}$

Quindi
$$\left.\frac{\text{Potenza uscita}}{\text{Potenza ingresso}}\right|_{\substack{\text{ingresso} \\ \text{coseno a } \omega_0}} = |H(\omega_0)|^2$$

che è a volte indicata come risposta in potenza

È interessante trovare il valore di ω_0 per il quale la potenza dell'uscita si dimezza: $|H(\omega_0)|^2 = 1/2$

Tale valore è a volte indicato come banda a 3dB del sistema, perché $10\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \approx -3dB$

Nota: la banda a 3dB è la stessa anche rispetto agli esponenziali immaginari puri