Inoltre, dalla proprietà commutativa della convoluzione segue che se L_1 è invertibile e L_2 è il suo inverso, allora anche L_2 è invertibile e L_1 è il suo inverso

Esempi

1) U_m è l'inverso di U_{-m}

Infatti $U_m[\delta] * U_{-m}[\delta] = U_m U_{-m}[\delta * \delta] = U_0[\delta] = \delta$

2) Sia L_1 il sistema t.d. definito da $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

e sia L_2 il sistema t.d. definito da $y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k)$

Allora L_1 è l'inverso di L_2

Infatti $h_1 = L[\delta] = \delta - \frac{1}{2}U_1[\delta]$ $\qquad h_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ -1/2 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$h_2(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{se } n<0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \geq 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

Ma abbiamo già visto (pag 23) che la convoluzione tra questi due segnali produce la δ.

6) Il sistema $y = h * x$ è un LTI

Infatti la P3.3 assicura la linearità, e usando la P4 abbiamo che, se $y = h * x = S[x]$ allora

$S[U_m[x]] = h * U_m[x] = U_m[h * x] = U_m[y] = U_m[S[x]]$

Quindi convoluzione e LTI sono equivalenti

Esercizio Per i seguenti sistemi, determinare se sono LTI, la loro RI, se sono stabili e causali

(1) $y(n) = m_{(n-N,\, n+N)}[x]$ (media centrata)

(2) $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$ (media mobile, MA)

(3) $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$ (accumulatore)

(4) $y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k x(n-k)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (AR 1)

---

(1) scriviamo esplicitamente l'espressione di y.

$$y(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} x(k)$$ posto $m = n-k$ $k = n-m$, si ha

$$y(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} x(n-m)$$

Sia $r_N(m)$ la funzione indicatrice di $\{-N, \dots -1, 0, \dots N\}$

Usando il trucco della funzione indicatrice, abbiamo

$$y(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_N(m)\, x(n-m) = \frac{1}{2N+1} r_N * x\ (n)$$

Avendo espresso y tramite convoluzione, abbiamo stabilito che è un LTI; la sua RI è (per ispezione)

$$h(n) = \frac{1}{2N+1} r_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{se } |n| \le N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siccome h è a supporto finito, il sistema è stabile; tuttavia, escluso il caso banale $N=0$, $h(n)$ è non nullo sia per indici positivi che negativi: Il sistema è dunque non causale

(2) Questo è un caso particolare di sistema a media mobile: $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k)$

I sistemi a media mobile sono LTI (MA, moving average) stabili e causali.

Infatti, posto $h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(n-k)$ si ha:

$$h * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(n-k-m)x(m)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k-m)x(m)$$

Ma $\delta(n-k-m)$ è non nullo solo per $m = n-k$

quindi $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k-m)x(m) = x(n-k)$ quindi

$$h * x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k)$$

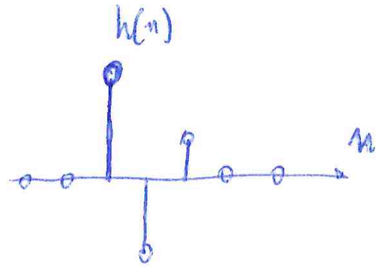
Abbiamo dimostrato che i sistemi MA sono LTI perché espressi tramite convoluzione

La risposta impulsiva di un MA è quindi

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \delta(n-k) = \begin{cases} a_n & \text{se } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il supporto di h è incluso in $\mathbb{N}$, quindi il sistema è causale. Essendo inoltre a supporto finito, $h \in \ell^1$ e quindi i sistemi MA sono sempre stabili

In questo caso, $h(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ -1/2 & \text{se } n = 1 \\ 1/3 & \text{se } n = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



③ Anche l'accumulatore può scriversi come convoluzione: posto $h(n) = u(n)$, si ha:

$$h * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(n-m)\, x(m)$$

$u(n-m)$ è non nullo se e solo se $n \geq m$

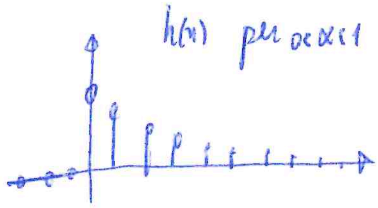
$$= \sum_{m \leq n} x(m) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

Abbiamo espresso l'accumulatore come convoluzione quindi è un LTI

La RI è il gradino, quindi il sistema è causale ma non stabile

(4) Usando il trucco della funzione indicatrice scriviamo:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k u(k)\, x(n-k) = h * x(n)$$



con $h(n) = \alpha^n u(n)$

Il sistema è <u>causale</u>; essendo

$$\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha|^n$$

Tale serie converge se e solo se $|\alpha| < 1$: in tal caso il sistema è <u>stabile</u>

Un tale sistema è detto autoregressivo del 1° ordine

CONVOLUZIONE A TEMPO CONTINUO

Come nel caso t.d., anche per il caso t.c. la convoluzione gioca un ruolo chiave nello studio degli LTI

<u>DEFINIZIONE</u>

Dati due segnali t.c. v e w, $\forall t \in \mathbb{R}$ si definisce integrale di convoluzione, e si indica con $v * w(t)$, il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau$$

a condizione che tale integrale converga

Nell'insieme di convergenza dell'integrale di convoluzione risulta dunque definita una nuova funzione, indicata con $v * w$ e detta convoluzione di v e w.

$$v * w\,(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau$$ $\forall t$ appartenente all'insieme di convergenza dell'integrale

Teorema di convergenza 1 (senza DIM.)

Se v e $w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, allora l'insieme di convergenza dell'integrale di convoluzione è $\mathbb{R}$ a meno di un numero di punti costituenti un insieme di misura nulla.

In altre parole, $v * w$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne, al più, un insieme discreto di punti

Inoltre $v, w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow v * w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Teorema di convergenza 2

Se $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e $w \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, allora $v * w$ converge su $\mathbb{R}$ ed appartiene a $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

DIM. $w \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in \mathbb{R},\ |w(t)| < M$

$$\Rightarrow |v * w\,(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |v(\tau)| \cdot |w(t-\tau)|\, d\tau$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} |v(\tau)| \cdot M\, d\tau = M \|v\|_1 < +\infty$$ perché $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Teorema di convergenza 3 (senza dim.)

Se $v, w \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $v * w$ converge per ogni $t \in \mathbb{R}$

Esempi di calcolo

Il calcolo della convoluzione è il calcolo di un integrale con un parametro t

Spesso, l'espressione dell'integranda varia a seconda del valore di t, in particolare quando usiamo segnali come rect, gradino, Λ, ecc.

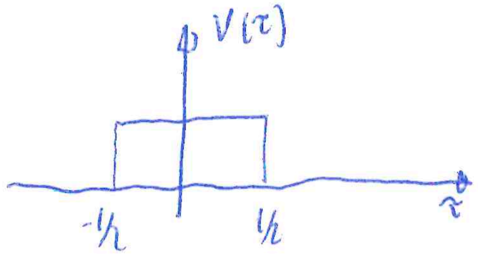
Conviene quindi individuare i valori di t che fanno cambiare l'espressione di $v(\tau) \cdot w(t-\tau)$

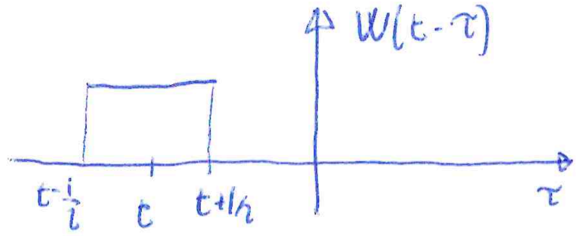
$$= v \cdot \mathcal{U}_t \mathcal{R}[w] \ (\tau)$$

cioè il prodotto tra v e una versione ribaltata e ritardata di w

1) Calcolare $v * w$ quando $v = \text{rect}$, $w = \text{rect}$

Prima di fare i calcoli può essere utile tracciare l'andamento di v e di $\mathcal{U}_t \mathcal{R}[w]$ come funzioni di τ





È chiaro allora che se $t+\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ (cioè $t<-1$) le due funzioni $V(\tau)$ e $W(t-\tau)$ hanno prodotto nullo; similmente per $t-\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ (cioè $t>1$).

Quindi dovremo trovare $v * w(t) = 0 \quad \forall\, |t|>1$

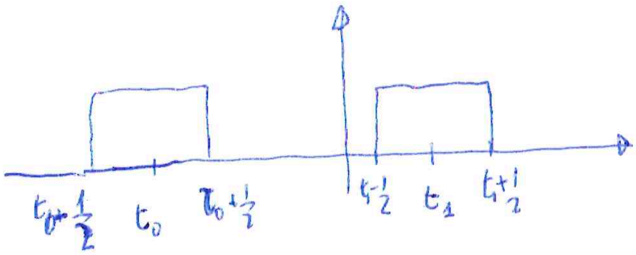
Facciamo adesso i calcoli, usando il trucco della funzione indicatrice

$$V * W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)W(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\tau)\,\mathrm{rect}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{= \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{rect}(t-\tau)\,d\tau}$$

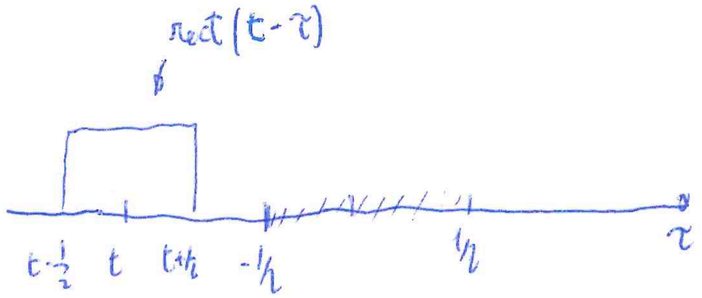
L'integranda è non nulla se e solo se $|t-\tau|<\frac{1}{2}$

cioè $-\frac{1}{2} < t-\tau < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}-t < -\tau < \frac{1}{2}-t \iff t-\frac{1}{2} < \tau < t+\frac{1}{2}$



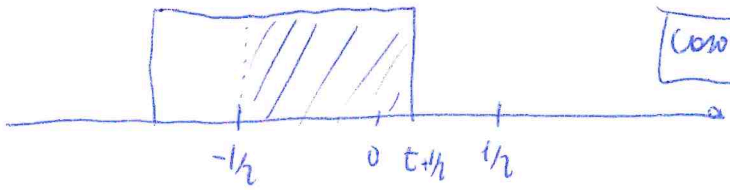
Se $t+\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$, l'integranda è sempre nulla in $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Se $t-\frac{1}{2} > 1/2$ " " " "



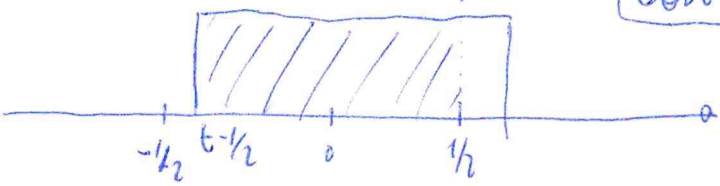
$\boxed{\text{caso 1}}$ $t+\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$

cioè $t<-1$: $v*w(t)=0$



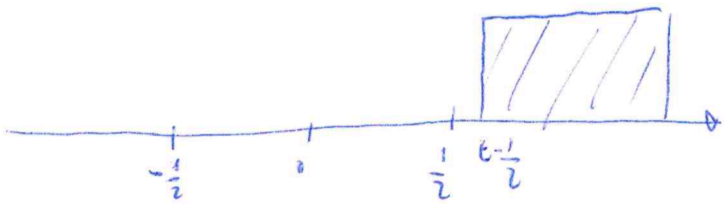
$\boxed{\text{caso 2}}$ $-\frac{1}{2}<t+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ cioè $-1<t<0$

$$v*w(t)=\int_{-1/2}^{t+1/2} dt = t+1$$



$\boxed{\text{caso 3}}$ $-\frac{1}{2}<t-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ cioè $0<t<1$

$$v*w(t)=\int_{t-1/2}^{1/2} dt = 1-t$$



$\boxed{\text{caso 4}}$ $t-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$ cioè $t>1$

$v*w(t)=0$

$$v*w(t)=\begin{cases} 0 & t<-1 \\ 1+t & -1<t<0 \\ 1-t & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases} = \Lambda(t)$$

Caratterizzazione dei sistemi LTI t.c.

Anche per i sistemi LTI t.c. introduciamo la risposta impulsiva: nonostante la delta di Dirac non sia una funzione in senso classico, è sempre possibile determinare la R.I. di un LTI, purché si ammetta l'uso delle funzioni generalizzate (delta e sue derivate)

Come nel caso t.d., useremo la lettera h per indicare la R.I. di un LTI L, $h = L[\delta]$

Esempi Ritardo: $y(t) = x(t-T) \Rightarrow h(t) = \delta(t-T)$

Integratore: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \Rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$

Teorema della risposta impulsiva (t.c.)

Sia L un LTI t.c. $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; sia $h = L[\delta]$ la RI di L

Se $y = L[x]$ allora è possibile calcolare y come segue:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x * h\ (t)$$

Nella dimostrazione invertiremo l'ordine degli operatori L e $\int_{-\infty}^{+\infty}$, senza però dimostrare che ciò è possibile

Partiamo dalla formula di rappresentazione integrale:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \mathcal{U}_\tau[\delta](t)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

Quindi

$$y(t) = L[x](t) = L\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \mathcal{U}_\tau[\delta](t)\, d\tau\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, L\,\mathcal{U}_\tau[\delta](t)\, d\tau$$

per linearità
(ma sarebbe da dimostrare)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \mathcal{U}_\tau L[\delta](t)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \mathcal{U}_\tau[h](t)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{C.V.D.}$$

Quindi abbiamo dimostrato che ogni LTI corrisponde ad una convoluzione (eccezione: casi "patologici" in cui l'inversione tra integrale e L non è lecita; sono casi irrilevanti dal punto di vista pratico)

Con le proprietà della convoluzione mostreremo anche che ogni convoluzione definisce un LTI. Avremo quindi una completa equivalenza tra LTI e R.I., come nel caso t.d.

Proprietà della convoluzione t.c.

Sotto ipotesi di convergenza della convoluzione, vale quanto segue:

P 1) Proprietà commutativa: $v * w = w * v$

P 2) Proprietà associativa: $(v * w) * z = v * (w * z)$

P 3) Proprietà distributiva: $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) * w = \alpha_1 (v_1 * w) + \alpha_2 (v_2 * w)$

P 4) Unità $v * \delta = v$ (è la rappresentazione integrale dei segnali)

P 5) Ritardo come convoluzione $\forall \beta \in \mathbb{R}, \; \mathcal{U}_\beta[v] = v * \mathcal{U}_\beta[\delta]$

Infatti $\mathcal{U}_\beta[\delta] * v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \beta)\, v(t-\tau)\, d\tau = v(t-\tau)\Big|_{\tau=\beta}$

$= v(t-\beta) = \mathcal{U}_\beta[v](t)$

P 6) Convoluzione di segnali ritardati

$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_\beta[x] * y = x * \mathcal{U}_\beta[y] = \mathcal{U}_\beta[x * y]$

La dimostrazione è formalmente identica al caso t.d.

P7) Supporto Se $v(t)=0 \quad \forall t < t_v$ e $\forall t > T_v$

e $w(t)=0 \quad \forall t < t_w$ e $\forall t > T_w$

allora $v * w(t)=0 \quad \forall t < t_v + t_w$ e $\forall t > T_v + T_w$

Senza dim. (la dim. è banale ma tediosa)

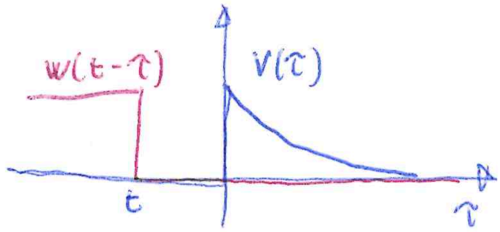
8) Derivata $\quad (v * w)' = v' * w = v * w'$

Senza DIM.

<u>Esercizio</u> Siano $v(t) = e^{-at} u(t) \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$

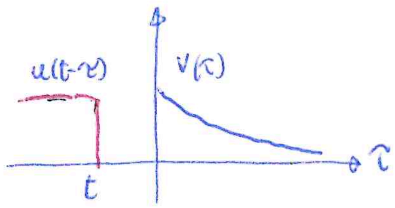
e $w(t) = u(t)$

calcolare $x(t) = v * w(t)$



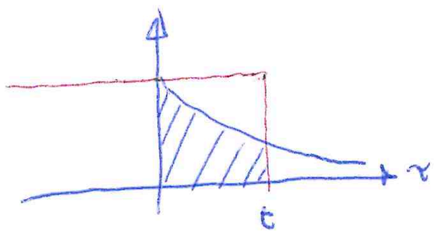
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-a\tau} u(t-\tau) d\tau$$

$t<0$



per $t<0 \quad x(t)=0$

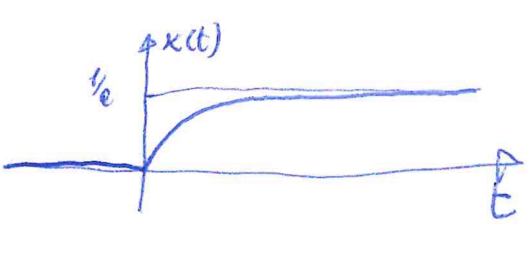
$t \geq 0$



per $t \geq 0 \quad x(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \left[\frac{-e^{-a\tau}}{a} \right]_0^t$

$= \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$

Quindi $x(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) u(t)$



Proprietà degli LTI t.c.

Le proprietà degli LTI t.c. sono legate alle proprietà della R.I., proprio come nel caso t.d.

1) Istantaneità: il sistema LTI t.c. L è istantaneo $\Leftrightarrow h = A\delta$

$\Rightarrow$ Se L è LTI istantaneo, deve essere $L[x] = Ax$ quindi $h = A\delta$

$\Leftarrow$ Se $h = A\delta$, $\quad y = L[x] = A\delta * x = Ay \quad \Rightarrow$ istantaneo

2) Causalità: il sistema LTI t.c. L è:

causale $\Leftrightarrow$ h ha supporto in $\mathbb{R}^+$

anticausale $\Leftrightarrow$ h ha supporto in $\mathbb{R}^-_0$

Dimostriamo l'equivalenza per la causalità:

$\Rightarrow$ $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

se h fosse non nulla in $t_0 < 0$, $y(t)$ dipenderebbe da $x(t+|t_0|)$ cioè dal futuro dell'ingresso, il che è impossibile per hp.

$\Leftarrow$ Per ipotesi, $h(t) = h(t) \cdot u(t)$. Allora

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, u(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

quindi $y(t)$ dipende da $x(t-\tau)$ solo con $\tau \geq 0$

quindi il sistema è causale

3) Stabilità BIBO — Il sistema LTI t.c. L è stabile

BIBO se e solo se $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Dimostriamo che $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ è una condizione sufficiente per la stabilità.

Basta applicare il criterio di convergenza: se $x \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ e $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, allora $x * h$ converge ed appartiene a $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Non dimostreremo invece la necessità della condizione

4) Serie di sistemi LTI

Come nel caso t.d., dalle proprietà algebriche della convoluzione segue che:

1) la serie di L_1 e L_2 è equivalente alla serie di L_2 e L_1
2) la serie di L_1 e L_2 è equivalente ad un sistema L la cui RI è $h = L_1[\delta] * L_2[\delta]$

5) Inversione di un LTI

Gli LTI possono modellare una trasformazione indesiderata di un segnale. Per esempio: il segnale ricevuto y tramite un canale di trasmissione, può essere una versione "distorta" del segnale trasmesso x, nel senso che esiste un segnale h tale che $y = h * x$

È interessante chiedersi allora se è possibile "invertire" un sistema, cioè trovare un $\hat{h}$ tale che $h * \hat{h} = \delta$

In tal caso, applicando $\hat{h}$ a y ritroveremmo x:

$$\hat{h} * y = \hat{h} * h * x = \delta * x = x$$

Per risolvere il problema dell'invertibilità di un sistema abbiamo bisogno della Trasformata di Fourier

Senza Trasformata di Fourier, siamo limitati ad esempi piuttosto banali

Esempio: l'inverso di L_i con $h_1(t) = \delta(t-\beta)$ (ritardo) è un sistema anticipatore la cui RI è $\delta(t+\beta)$ (anticausale)

6) Ogni convoluzione stabilisce un LTI

Infatti, se $S[x] = h * x$ allora:

linearità: $S[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2] = h * (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 (h * x_1) + \alpha_2 (h * x_2)$

(usando P3) $= \alpha_1 S[x_1] + \alpha_2 S[x_2]$

tempo-invariante: $S[\mathcal{U}_\beta[x]] = h * \mathcal{U}_\beta[x] =$

(per P6) $= \mathcal{U}_\beta[h * x] =$

$= \mathcal{U}_\beta[S[x]]$ CVD