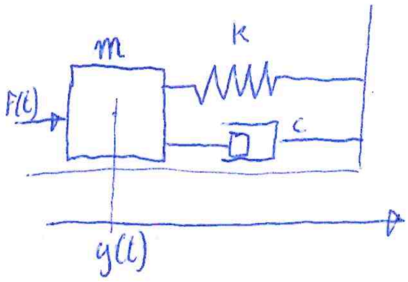
Sistemi in forma implicita

Finora abbiamo considerato dei sistemi in cui l'uscita è espressa esplicitamente in termini dell'ingresso: si parla di sistemi in forma esplicita

Spesso i sistemi possono essere in forma "implicita" cioè essere espressi tramite equazioni (eq. differenziali, alle differenze

Esempio 1 — Sistema massa-molla-smorzatore



In un sistema di tale tipo, la massa è sottoposta a: una forza "esterna" (segnale d'ingresso) la forza elastica e lo smorzamento

$$\sum F_i = F(t) - Ky(t) - cy'(t) = ma(t) = my''(t)$$

dove y è la posizione della massa rispetto alla posizione di riposo in cui la forza elastica è nulla.
Si ha una equazione differenziale: $my'' + cy' + Ky = x$

Se fissiamo la velocità e la posizione iniziale della massa (cioè assegnamo i valori di $y(t)$ e $y'(t)$ per $t=0$) l'equazione differenziale definisce un <u>sistema</u> nel senso che essa associa ad ogni segnale x (definito in $\mathbb{R}^+$) un segnale y: cioè la forza applicata determina la posizione.

Tale sistema è in forma implicita perché, noto $x(t)$, non abbiamo direttamente $y(\cdot)$, ma un'equazione la cui soluzione è $y(\cdot)$.

Mostreremo in seguito che si tratta di un particolare tipo di sistema: esso è <u>lineare</u> e <u>tempo-invariante</u>

La linearità rispecchia il principio di sovrapposizione degli effetti delle leggi della dinamica

La tempo invarianza rispecchia il fatto che, nel modello utilizzato, il sistema "non invecchia", cioè i suoi parametri (la massa m, la costante elastica k e quella di smorzamento c) non variano nel tempo.

È interessante notare che altri problemi di natura fisica completamente diversa, come ad esempio un circuito RLC, condividono la stessa formulazione matematica (equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti), e quindi si risolve con gli stessi metodi.
Nel seguito ci focalizzeremo prima sui sistemi in forma esplicita e nella parte finale del corso, su quelli in forma implicita.

Sistemi lineari Tempo invarianti (LTI)

I sistemi LTI sono un modello matematico molto importante:

1) Essi rappresentano efficacemente fenomeni fisici di natura vario: sistemi dinamici, circuiti elettrici RLC, trasmissione del calore, ecc.

2) Il loro studio può essere condotto con strumenti matematici particolarmente efficaci e relativamente semplici;

Per questi motivi, ci concentreremo molto su questo Tipo di sistemi

In particolare i sistemi LTI possono essere <u>caratterizzati</u> con una singola funzione, il che ne rende particolarmente efficace la trattazione.

Tale funzione è la cosiddetta <u>risposta impulsiva</u> del sistema, e cioè l'uscita corrispondente ad un ingresso pari alla delta.

Tutto ciò è vero sia a T.d. che a T.c. Cominceremo dal caso t.d., per il quale la trattazione è più semplice

Risposta impulsiva di un sistema LTI t.d.

Sia L un sistema t.d., lineare e tempo invariante.
Si definisce risposta impulsiva di S, e si indica con il simbolo h, il segnale

$$h = L[\delta]$$

dove δ è la delta di Kronecker: $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$

L'importanza della risposta impulsiva è che essa è una caratterizzazione del sistema LTI: ciò vuol dire che, noto h, esiste una formula esplicita che mi permette di calcolare $y = L[x]$ qualunque sia l'ingresso x
[In realtà non proprio qualunque: è possibile creare dei casi "estremi" in cui ciò non è vero, ma questo corrisponde a modelli matematici di scarsa o nulla applicabilità]

È abbastanza intuitivo affermare che ogni sistema LTI t.d. è dotato di risposta impulsiva: dopotutto si tratta di applicare al sistema un ingresso la cui natura è particolarmente semplice. Tuttavia, non dimostreremo tale risultato

Teorema della risposta impulsiva (C.d.)

Sia L un sistema LTI: $L: X \to Y$; sia $h = L[\delta]$ risposta impulsiva.

Se $y \in Y$ è l'uscita di L corrispondente a $x \in X$ (cioè se $y = L[x]$) è possibile calcolare y come segue:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, h(n-m) \qquad (1)$$

<u>Nota 1</u> La (1) è detta <u>convoluzione</u> tra x e h e si scrive anche $y = x * h$

<u>Nota 2</u> La (1) ha senso se l'uscita y è finita per ogni n. È possibile dare delle condizioni sufficienti di convergenza. Per esempio $x * h$ converge se: a) $x \in \ell^1$ e $h \in \ell^\infty$; b) se $x \in \ell^2$ e $h \in \ell^2$ c) se $x \in \ell^\infty$ e $h \in \ell^1$

<u>DIM.</u> Dimostriamo il Teorema nel caso di segnale x a supporto finito: $\exists\, m_1, m_2$ tali che $\forall n < m_1$ o $n > m_2$, $x(n) = 0$

Ricordiamo che, qualunque sia $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, \delta(n-m) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, U_m[\delta]$$

Se x è a supporto finito, possiamo scrivere

$$x = \sum_{m=m_1}^{m_2} x(m)\, U_m[\delta]$$

Avremo allora

$$y = L[x] = L\left[\sum_{m=m_1}^{m_2} x(m)\, U_m[\delta]\right] \overset{(a)}{=} \sum_{m=m_1}^{m_2} x(m)\, L\left[U_m[\delta]\right]$$

$$\overset{(b)}{=} \sum_{m=m_1}^{m_2} x(m)\, U_m\left[L[\delta]\right] \overset{(c)}{=} \sum_{m=m_1}^{m_2} x(m)\, U_m[h] \overset{(d)}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, U_m[h]$$

(a) : per linearità

(b) : per tempo invariante

(c) : definizione di h

(d) perché $x(m)$ è nullo per ogni $m < m_1$ e per ogni $m > m_2$

Scrivendo esplicitamente il valore di $y(n)$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, h(n-m) \qquad (1)}$$

Quindi, nota la risposta impulsiva h, si può scrivere la risposta ad un generico segnale x a supporto finito.
Questa operazione è detta convoluzione tra x e h e si indica così: $\quad y = x * h \quad (2)$

La (1) descrive la convoluzione campione per campione, la (2) evidenzia che è un operazione tra segnali

Abbiamo dimostrato che $L[x] = x * h$ se x è a supporto finito. In realtà tale proprietà vale sempre purché la somma di convoluzione converge

Criteri di convergenza della convoluzione t.d.

È possibile dimostrare che, se $v \in \ell^p$ e $w \in \ell^k$, con $p, k \in \{1, 2, \infty\}$ allora:

se $p = 1$, $v * w = w * v = z \in \ell^k$ (convergenza)

se $p = 2$ e $k = 2$, $v * w = w * v = z \in \ell^\infty$ (convergenza)

se $p = 2$ e $k = \infty$, o se $p = \infty$ e $k = \infty$, nulla possiamo dire sulla convergenza di $v * w$ e $w * v$

Tabella riassuntiva

$z \in \ell^m$ — $w \in \ell^k$ (k) \ $v \in \ell^p$ (p)			
	1	2	∞
	2	∞	-
	∞	-	-

Commutatività della convoluzione

Con un semplice cambio di variabile si dimostra che la convoluzione è commutativa:

$$z = v * w = w * v$$

$$z(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m)\, w(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(n-m)\, w(m)$$

Esempi di calcolo della convoluzione

Calcoliamo $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m)\, w(n-m)$

Conviene rendere espliciti alcuni termini della somma

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) = \; & v(0)\,w(n) \\ & + v(1)\,w(n-1) \\ & + v(2)\,w(n-2) \\ & \vdots \\ & + v(-1)\,w(n+1) \\ & + v(-2)\,w(n+2) \\ & \vdots \end{aligned}}$$

Visto che la convoluzione è commutativa, il ruolo di v e w può essere invertito

Esercizio 1

$$v(n) = \delta(n) - \delta(n-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ -1 & \text{se } = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$w(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + 2\,\delta(n-2) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ -1 & \text{se } n=1 \\ 2 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

calcolare $x = v * w$

Conviene scrivere $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m)\, w(n-m) = v(0)\,w(n) + v(1)\,w(n-1)$

Infatti $\forall m \notin \{0,1\}$, $v(m) = 0$

Abbiamo allora $x(n) = w(n) - w(n-1) = \begin{cases} 0 & \forall\, n<0 \\ 1-0=1 & \text{se } n=0 \\ -1-1=-2 & \text{se } n=1 \\ 2-(-1)=3 & \text{se } n=2 \\ 0-2=-2 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{se } n>3 \end{cases}$

$= \delta(n) - 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) - 2\delta(n-3)$

<u>Esercizio 2</u>

$$v(n) = (1/2)^n \cdot u(n)$$
$$w(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

Osserviamo che $v, w \in \ell^1 \Rightarrow x \in \ell^1$

Conviene scrivere
$$x(n) = w(0)\, v(n) + w(1)\, v(n-1)$$
$$= v(n) - \frac{1}{2} v(n-1)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot [u(n) - u(n-1)] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \delta(n) = \delta(n)$$

Quindi $v * w = \delta$

<u>Esercizio 3</u> Calcolare $x = \delta * w$ con w qualsiasi

Si ha: $$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(m)\, w(n-m) = w(n)$$ quindi $\delta * w = w$

In effetti, la δ è l'elemento neutro della convoluzione
$$\forall w : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad w * \delta = \delta * w = w$$

Proprietà della convoluzione a t.d.

P1) Ricordiamo la definizione

Dati due segnali t.d.: $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ e $y: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

per ogni n intero si consideri la serie $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, y(n-m)$

Se la serie converge per ogni n, si può definire un nuovo segnale z, indicato con $x * y$ e tale che,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad z(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, y(n-m)$$

Notazione per "valori": $z(n) = x * y\,(n)$

Notazione per "segnali": $z = x * y = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m)\, \mathcal{U}_m[y]$

P2) Regole di convergenza (senza dim.)

Se $x \in \ell^1$ e $y \in \ell^p$, $x * y = y * x \in \ell^p$ $\quad (p \in \{1, 2, \infty\})$

Se $x \in \ell^2$ e $y \in \ell^2$, $x * y = y * x \in \ell^\infty$

Negli altri casi, non si può stabilire a priori la convergenza

P3) Proprietà algebriche (in ipotesi di convergenza)

P3.1) Commutatività: $x * y = y * x$

P3.2) Associatività: $(x * y) * z = x * (y * z)$

P3.3) Linearità: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha x + \beta y) * z = \alpha (x * z) + \beta (y * z)$

P3.4) Elemento neutro: $x * \delta = x$

Per queste prime proprietà le dimostrazioni sono omesse perché banali

P4) Ritardo come convoluzione

$\forall\, x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{U}_m[x] = x * \mathcal{U}_m[\delta]$

DIM. Usiamo la notazione $w = \mathcal{U}_m[\delta]$. Avremo, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $w(n) = \delta(n-m)$. Usiamo anche $z = x * \mathcal{U}_m[\delta] = x * w$

Allora, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, w(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, \delta(n-m-k)$

ma $\delta(n-m-k)$ è non nullo se e solo se $k = n-m$, e in tal caso vale 1. Si ha allora

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad z(n) = x(n-m)$ cioè $x * \mathcal{U}_m[\delta] = z = \mathcal{U}_m[x]$ c.v.d.

P5) Convoluzione di segnali ritardati

$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x, y$ segnali T.d.

$$\mathcal{U}_m[x] * y = x * \mathcal{U}_m[y] = \mathcal{U}_m[x * y]$$

DIM. $\mathcal{U}_m[x] * y \overset{(a)}{=} (x * \mathcal{U}_m[\delta]) * y$

$\overset{(b)}{=} x * (\mathcal{U}_m[\delta] * y)$

$\overset{(c)}{=} x * \mathcal{U}_m[y]$

$\overset{(d)}{=} (\mathcal{U}_m[\delta] * x) * y$

$\overset{(e)}{=} \mathcal{U}_m[\delta] * (x * y)$

$\overset{(f)}{=} \mathcal{U}_m[x * y]$

(a): per P4
(b): per P3.2
(c): per P4
(d) per P3.1
(e) per P3.2
(f) per P4

Corollario $\mathcal{U}_m[x] * \mathcal{U}_\ell[y] = \mathcal{U}_{m+\ell}[x * y]$

P6) <u>Supporto</u>

Se x ha supporto $\{0, \dots N-1\}$

e y ha supporto $\{0, \dots, M-1\}$

allora $x * y$ ha supporto in $\{0, \dots, N+M-2\}$

Se x è "lungo" N e y è "lungo" M, $x * y$ è "lungo" $N+M-1$.

<u>DIM</u>. Sia $z = x * y$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad z(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, y(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(n-m)$$

perché x è nulla per indici negativi o maggiori o uguali ad N

Siccome $0 \leq m \leq N-1$, se $n < 0$, $n - m < 0 \Rightarrow y(n-m) = 0$

quindi $z(n) = 0 \quad \forall n < 0$

Se invece $n > N+M-2$, siccome $m \leq N-1$ abbiamo

$n - m > N+M-2-(N-1) = M-1$ e quindi $y(n-m) = 0$

Allora $z(n) = 0 \quad \forall n > N+M-2$

P6.1) Generalizzazione

Se x ha supporto $\{n_1, n_1+1, \dots n_2\}$

e y ha supporto $\{m_1, m_1+1, \dots, m_2\}$

$x * y$ ha supporto in $\{n_1+m_1, \dots, n_2+m_2+1\}$

Quindi vale sempre che il supporto della convoluzione è "lungo" come la somma dei supporti meno 1

DIM. Scriviamo $x = \mathcal{U}_{n_1}[x_1]$ e $y = \mathcal{U}_{m_1}[y_1]$

Poniamo $N = n_2 - n_1 + 1$ e $M = m_2 - m_1 + 1$

x_1 e y_1 soddisfano le ipotesi della P6) quindi il supporto di $x_1 * y_1$ è $\{0, 1, \dots N+M-1\}$

Inoltre $x * y = \mathcal{U}_{n_1}[x_1] * \mathcal{U}_{m_1}[y_1] = \mathcal{U}_{n_1}\mathcal{U}_{m_1}[x_1 * y_1]$

$= \mathcal{U}_{n_1+m_1}[x_1 * y_1]$

Il cui supporto è quindi da $n_1 + m_1$ a $n_1 + m_1 + N + M - 1$

$= n_1 + m_1 + \overbrace{n_2 - n_1 + 1}^{N} + \overbrace{m_2 - m_1 + 1}^{M} - 1 = n_2 + m_2 + 1$

C.V.D.

Esempi Se x ha supporto $0 \dots 9$ e y ha supporto $0 \dots 3$

$x * y$ ha supporto $0 \dots 13$ (infatti $N = 10$ e $M = 4$)

Se x ha supporto $-5 \dots 5$ e y ha supporto $-3, \dots 3$,

$x * y$ ha supporto $-8 \dots 7$ $(N = 11,\ M = 7,\ N+M-1 = 16)$

P.7.) Differenza prima Se $D[x](n) = x(n) - x(n-1)$

allora $D[x * y] = D[x] * y = x * D[y]$

DIM Basta osservare che $D[x] = x * [\delta - \mathcal{U}_1[\delta]]$

Allora $D[x * y] = (x * y) * (\delta - \mathcal{U}_1[\delta]) =$

$= (x * (\delta - \mathcal{U}_1[\delta])) * y$

$= x * ((\delta - \mathcal{U}_1[\delta]) * y)$

Convoluzione e sistemi LTI (t.d.)

Il Teorema della risposta impulsiva permette di legare le proprietà di un LTI a quelle della sua R.I.

Nel seguito, sia L un LTI e $h = L[\delta]$ la sua risposta impulsiva

1) <u>Istantaneità</u> Il sistema LTI t.d L è istantaneo $\Leftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{C} : h(n) = A\,\delta(n)$

DIM $\Leftarrow$ Sia $y = L[x]$; $y(n) = \sum_m x(m)\,h(n-m) = \sum_m x(m)\,A\delta(n-m) = Ax(n)$

DIM $\Rightarrow$ Per assurdo. Sia $m \neq 0$ e $h(m) = A \neq 0$

allora $L[x](n) = \sum_k x(k)\,h(n-k)$

In questa somma c'è almeno il termine per $k = n-m$ che non è nullo: $y(n) = Ax(n-m) + \sum_{k \neq (n-m)} x(k)\,h(n-k)$

quindi $y(n)$ dipende [anche] da $x(n-m)$

2) <u>Causalità</u> Il sistema LTI t.d. L è causale [anticausale] se e solo se il supporto di h è $n \geq 0$ [$n < 0$]

<u>DIM.</u> Sia $y = L[x]$: si ha

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\,x(n-m)$$

Se L è causale [anti-causale], $y(n)$ non può dipendere da $x(n-m)$ con $m<0$ [$m \geq 0$], dunque deve essere $h(m)=0$ $\forall m<0$ [$\forall m \geq 0$]

Viceversa, se $h(m)=0$ $\forall m<0$ [$\forall m \geq 0$], nella somma di convoluzione i termini con ritardo $m<0$ [$m \geq 0$] non contribuiscono all'uscita, quindi il sistema è causale [anti-causale].

3) Stabilità BIBO

Sia $x \in l^\infty$ e $h \in l^1$: dalle regole di convergenza sappiamo che $(h * x) \in l^\infty$, quindi un sistema LTI con R.I. assolutamente sommabile è stabile

Se invece la risposta impulsiva h di un sistema LTI non è l^1, niente possiamo dire di $h * x$ quando $x \in l^\infty$

Si può mostrare che $h \in l^1$ è anche condizione necessaria per la stabilità del sistema

4) Serie (o cascata) di LTI

Consideriamo la serie di due LTI L_1 e L_2 con risposte impulsive h_1 e h_2

$$x \to \boxed{L_1} \xrightarrow{y} \boxed{L_2} \to z$$

Sia $y = L_1[x]$ e

$z = L_2[y]$

Abbiamo $y = h_1 * x$ e $z = h_2 * y$ quindi

$$z = h_2 * (h_1 * x) = (h_1 * h_2) * x = h_1 * (h_2 * x)$$

Dire $z = (h_1 * h_2) * x$ significa che la serie di due LTI è equivalente ad un solo LTI con RI $h_1 * h_2$

Dire $z = h_1 * (h_2 * x)$ significa che, nella serie tra due LTI possiamo invertire l'ordine dei sistemi ed ottenere sempre lo stesso risultato

5) Invertibilità dei sistemi

Se $h_1 * h_2 = \delta$, allora un sistema LTI di R.I. h_1 è detto invertibile, ed il suo sistema inverso è un LTI di R.I. h_2.

Quindi, applicando un sistema invertibile al segnale x e poi applicando il sistema inverso all'uscita, si ritrova x