UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I

Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Definizione di limite e calcolo di limiti di funzioni

Tutor: Guido Costagliola

Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"When I wrote this, only God and I understood what I was doing. Now, God only knows".

-K. Weierstrass

Nozioni da conoscere:

Definizione di limite, limite finito ed infinito per x tendente ad un valore finito, limite finito ed infinito per x tendente a $\pm\infty$, prodotti notevoli, scomposizione di polinomi, gerarchia degli infiniti.

1 Verifica dell'esistenza di un limite

Verificare i seguenti limiti applicando l'opportuna definizione.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

2. $$\lim_{x\to 2} 3x + 2 = 8$$

3. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x}{x+1} = -2$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{9^x - 1}{3^x - 1} = 2$$

5. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = +\infty$$

6. $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

7. $$\lim_{x\to 3^+} e^{\frac{2}{3-x}} = 0$$

2 Calcolo di limiti

Calcolare il valore dei seguenti limiti.

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$$

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{3x-2}{2x+3} - \frac{3x+2}{2x-3}\right)$$

4.
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$$

5.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

6.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2-x}$$

7.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

8.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{3^x}$$

9.
$$\lim_{x\to +\infty} (x^3+3x)2^{-x}$$

10.
$$\lim_{x\to -\infty} x(\sqrt{1+x^4}-x^2)$$

Soluzioni

Verifica dell'esistenza di un limite

Nota: le funzioni di cui si verificheranno i limiti saranno denominate genericamente $f(x)$.

1. Bisogna verificare che $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $f(x) > M$, con x incluso nel dominio di $f(x)$.

$$\frac{1}{x^4} > M \iff \frac{1}{x^4} - M > 0 \iff \frac{1 - Mx^4}{x^4} > 0 \iff 1 - Mx^4 > 0 \iff x^4 < \frac{1}{M}$$
$$\iff -\sqrt[4]{\frac{1}{M}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{M}} \iff |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}$$

   Ponendo $\delta = \sqrt[4]{\frac{1}{M}}$, la definizione è soddisfatta e il limite risulta verificato.

2. Bisogna verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $|x - 2| < \delta$ allora $|f(x) - 8| < \epsilon$.

$$|3x + 2 - 8| < \epsilon \iff |3x - 6| < \epsilon \iff |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$$

   Ponendo $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, il limite risulta verificato.

3. Dobbiamo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0$ tale che se $x > M$ allora $|f(x) + 2| < \epsilon$.

$$|\frac{-2x}{x+1} + 2| < \epsilon \iff |\frac{\cancel{-2x} \cancel{+2x} + 2}{x+1}| < \epsilon \iff |\frac{x+1}{2}| > \frac{1}{\epsilon} \iff |x + 1| > \frac{2}{\epsilon}$$
$$\iff x + 1 > \frac{2}{\epsilon} \lor x + 1 < -\frac{2}{\epsilon} \iff x > \frac{2}{\epsilon} - 1 \lor x < -\frac{2}{\epsilon} - 1$$

   A noi interessa la prima ($x \to +\infty$), poniamo allora $M = \frac{2}{\epsilon} - 1$ e il limite risulta verificato.

4. Bisogna verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|f(x) - 2| < \epsilon$.

$$\left| \frac{9^x - 1}{3^x - 1} - 2 \right| < \epsilon \iff \left| \frac{\cancel{(3^x - 1)}(3^x + 1)}{\cancel{(3^x - 1)}} - 2 \right| < \epsilon \iff |3^x + 1 - 2| < \epsilon \iff |3^x - 1| < \epsilon$$
$$\iff -\epsilon < 3^x - 1 < \epsilon \iff 1 - \epsilon < 3^x < 1 + \epsilon \iff \log_3(1 - \epsilon) < x < \log_3(1 + \epsilon)$$

   che è un intorno bucato di 0. Il limite risulta allora verificato.

5. Bisogna verificare che $\forall N > 0 \quad \exists M > 0$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > N$.

$$\frac{x^2 - 1}{x} > N \iff \frac{x^2 - 1}{x} - N > 0 \iff \frac{x^2 - Nx - 1}{x} > 0$$

   Restringiamoci a $x > 0$. Gli zeri del numeratore sono: $x_{\pm} = \frac{N \pm \sqrt{N^2+4}}{2}$. A noi interessa la soluzione positiva. La disequazione è verificata per $x > \frac{N + \sqrt{N^2+4}}{2}$. Poniamo $M = \frac{N + \sqrt{N^2+4}}{2}$ e il limite risulta verificato.

6. Bisogna verificare che $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $-\delta < x < 0$ allora $f(x) < -M$.

$$\frac{1}{x^3} < -M \iff \frac{1}{x^3} + M < 0 \iff \frac{1 + Mx^3}{x^3} < 0 \iff -\sqrt[3]{\frac{1}{M}} < x < 0$$

che è un intorno sinistro di 0. Poniamo $\delta = \sqrt[3]{\frac{1}{M}}$ e il limite è verificato.

7. Bisogna verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $3 < x < 3 + \delta$ allora $|f(x)| < \epsilon$.

$$\left| e^{\frac{2}{3-x}} \right| < \epsilon \iff e^{\frac{2}{3-x}} < \epsilon \iff \frac{2}{3-x} < \log \epsilon \iff \frac{2}{3-x} - \log \epsilon < 0$$
$$\iff \frac{2 - 3\log \epsilon + x \log \epsilon}{3-x} < 0$$

Risolta per $3 < x < 3 - \frac{2}{\log \epsilon}$. Poniamo $\delta = -\frac{2}{\log \epsilon}$ e il limite risulta verificato.

Calcolo di limiti

1.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{2}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2} + x \cancel{-2}}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3x-2}{2x+3} - \frac{3x+2}{2x-3} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{(2x-3)(3x-2) - (2x+3)(3x+2)}{(2x+3)(2x-3)} \right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\cancel{6x^2} - 4x - 9x \cancel{+6} \cancel{-6x^2} - 4x - 9x \cancel{-6}}{(2x+3)(2x-3)} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{-26\cancel{x}}{4x^2 - 9} = \lim_{x\to 0} \frac{-26}{4x^2 - 9} = \frac{26}{9}$$

4.
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x + 1 - 2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{2}$$

5.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x \cancel{-1}}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = \frac{1}{3}$$

Dove si è usato: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x\cancel{-1}}{x(x-1)(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{1+x}+1)}=-\frac{1}{2}$$

7.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

per il teorema dei Carabinieri, infatti:

$$-1\leq \sin x\leq 1 \iff -\frac{1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}.$$

Nota: questo vale sempre quando al numeratore è presente una funzione limitata, mentre il denominatore tende a $\pm\infty$.

8.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3^x}=0$$

per gerarchia degli infiniti $\Rightarrow$ l'esponenziale a^x con $a>1$ cresce più velocemente di qualunque polinomio.

9.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+3x)2^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x}{2^x}=0$$

per lo stesso ragionamento di prima.

10.

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^4}-x^2)=\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^4}-x^2)\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\cancel{x^4}\cancel{-x^4})}{\sqrt{1+x^4}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^4}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)}=0$$