METODI STATISTICI PER LA BIOINGEGNERIA (B)

PARTE 6: VERIFICA DELLE IPOTESI MEDIANTE TEST STATISTICI PARAMETRICI (SECONDA PARTE)

A.A. 2024-2025

Prof. Martina Vettoretti

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICA DI IPOTESI SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA INCOGNITA

- Supponiamo di disporre di un campione aleatorio $X_1, X_2, \dots, X_n$ che ipotizziamo essere estratto da una popolazione normale con media e varianza entrambe incognite (caso molto più comune!).
- Ipotizziamo di voler verificare il sistema di ipotesi bilaterale:
  - $H_0\colon \mu = \mu_0$
  - $H_1\colon \mu \neq \mu_0$
- Il test statistico che possiamo utilizzare in questa situazione si chiama **t test bilaterale.**

T TEST BILATERALE: LA STATISTICA DEL TEST

- Per il test statistico con σ^2 noto abbiamo utilizzato come statistica del test la variabile aleatoria:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- In questo caso σ^2 è incognito. Possiamo però stimare questo valore a partire dai dati utilizzando la deviazione standard campionaria, S, come stimatore:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

- La statistica del test risulta quindi la variabile aleatoria T così definita:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

T TEST BILATERALE: LA REGIONE CRITICA

- Si può dimostrare che quando H_0 è vera, ovvero quando $\mu = \mu_0$, la variabile aleatoria T ha distribuzione t di Student con n-1 gradi di libertà.

$$\text{Se } \mu = \mu_0 \rightarrow T \sim t_{n-1}$$

- A questo punto possiamo pensare di rifiutare H_0 quando il valore osservato per T è in valore assoluto più grande di una certa quantità c, ovvero μ è sufficientemente distante da μ_0. La regione critica sarà dunque del tipo:

$$R \coloneqq \{T: |T| > c\}$$

- Ipotizziamo che il livello di significatività scelto sia α. Per garantire che la probabilità di rifiutare H_0 quando H_0 è vera (errore di prima specie) sia α, dobbiamo imporre che:
  - $P(|T| > c) = \alpha$
  - $P(T > c) + P(T \leq -c) = 2 \cdot P(T > c) = \alpha$
  - $P(T > c) = \alpha/2$

Per la simmetria della t di Student

c è il quantile della t di Student con n-1 gradi di libertà di probabilità $\alpha/2$

$$c = t_{\alpha/2, n-1}$$

T TEST BILATERALE: REGOLA DECISIONALE

- Se $|T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ → rifiutiamo H_0 (quindi accettiamo H_1)
  - Possiamo dire che μ è significativamente diverso da μ_0
- Se $|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ → non possiamo rifiutare H_0 (quindi «accettiamo» H_0)
  - Non possiamo dire nulla su μ

Alternativamente possiamo prendere una decisione sulla base del p-value:

$$p - value = P(|T| > |t_{oss}|) = 2 \cdot P(T > |t_{oss}|)$$

dove t_{oss} è il valore osservato per la statistica del test (calcolato sulla base dei dati).

- Se p-value $< \alpha$ → rifiutiamo H_0
- Se p-value $\geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0

ESERCIZIO 1

La quantità di principio attivo contenuta nelle pillole vendute da una ditta farmaceutica può avere una certa variabilità, comunque il suo valore medio dichiarato è 20 mg. Per convalidare questa affermazione, si misura la quantità di principio attivo in un campione di 25 pillole, trovando una media campionaria di 19.7 mg e una deviazione standard campionaria di 1.3 mg.

Che conclusioni possiamo trarre dai dati? Con un livello di significatività del 5%, possiamo dire che i dati dell'esperimento dimostrano che l'affermazione della ditta farmaceutica non è vera?

SOLUZIONE

- Assumiamo che i dati provengano da una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2 incognite.
- Applichiamo il t test bilaterale per verificare il sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu = 20\ mg$
  - $H_1: \mu \neq 20\ mg$
- Calcoliamo il valore osservato per la statistica del test:

$$t_{oss} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{19.7 - 20.0}{1.3/\sqrt{25}} = -1.1538$$

- Con α=5%, $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,24} = 2.064$
- Poiché $|t_{oss}| \leq t_{\alpha/2,n-1}$, non possiamo rifiutare H_0 → non possiamo affermare nulla sulla quantità media di principio attivo nelle pillole.

T TEST UNILATERALE O A UNA CODA (1/2)

- Supponiamo di disporre di un campione aleatorio $X_1, X_2, \dots, X_n$ estratto da una popolazione normale con media e varianza entrambe incognite.
- Ipotizziamo di voler verificare il sistema di ipotesi unilaterale:
  - $H_0: \mu = \mu_0$ (o $H_0: \mu \leq \mu_0$)
  - $H_1: \mu > \mu_0$

  con un livello di significatività α.
- Un test adatto in questo caso è il **t test unilaterale** o a **una coda.**
- Regola decisionale del test:
  - Se $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha,n-1} \rightarrow$ rifiutiamo H_0
  - Se $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha,n-1} \rightarrow$ non possiamo rifiutare H_0

T TEST UNILATERALE O A UNA CODA (2/2)

- Analogamente, se il sistema di ipotesi è:
  - $H_0: \mu = \mu_0$ (o $H_0: \mu \geq \mu_0$)
  - $H_1: \mu < \mu_0$

  La regola decisionale del test:
  - Se $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{\alpha,n-1} \rightarrow$ rifiutiamo H_0
  - Se $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq -t_{\alpha,n-1} \rightarrow$ non possiamo rifiutare H_0

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICARE SE DUE POPOLAZIONI NORMALI HANNO LA STESSA MEDIA – CASO CON VARIANZE NOTE

- Supponiamo di disporre di due campioni aleatori indipendenti provenienti da due popolazioni normali con medie incognite e varianze note.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$
$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

μ_X, μ_Y → parametri incogniti

σ_X^2, σ_Y^2 → parametri noti

- Ipotizziamo di voler verificare il sistema di ipotesi bilaterale:
  - $H_0: \mu_X = \mu_Y$
  - $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

LA STATISTICA DEL TEST

- Come statistica del test ci serve una quantità che rappresenti quanto sono distanti tra loro μ_X e μ_Y. Pensando di stimare μ_X con $\overline{X}$ e μ_Y con $\overline{Y}$, potremmo considerare la variabile aleatoria:

$$V = \bar{X} - \bar{Y}, \quad V \sim N\left(\mu_X - \mu_y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

- Quando vale H_0, $\mu_X - \mu_y = 0 \rightarrow V \sim N(0, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m})$.
- Standardizzando V otteniamo la statistica del test che nell'ipotesi che H_0 sia vera è una normale standard:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}, \qquad Z \sim N(0,1)$$

REGOLA DECISIONALE

- Considerando il livello di significatività α, la regola decisionale sarà:
  - Se $\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}}\right| > z_{\alpha/2}$ → rifiutiamo H_0 → μ_X e μ_Y significativamente diverse
  - Se $\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}}\right| \leq z_{\alpha/2}$ → non possiamo rifiutare H_0 → non possiamo dire nulla
- In alternativa si può calcolare il p-value a partire dal valore z osservato per la statistica Z, e usare la regola decisionale basata sul p-value:

$$p - value = P(|Z| > |z|) = 2 \cdot (1 - \Phi(z)).$$

  - Se $p - value < \alpha$ → rifiutiamo H_0
  - Se $p - value \geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0

ESERCIZIO 2

Uno scienziato che si occupa di inquinamento ambientale vuole verificare se due campioni di soluzioni in suo possesso hanno lo stesso pH. Per stabilire se questo sia vero, vengono fatte 10 misurazioni indipendenti per ciascuna soluzione. Il metodo di misura utilizzato garantisce che i valori misurati hanno distribuzione normale con deviazione standard pari a 0.05. I dati raccolti sono:

- Soluzione A: {6.24, 6.31, 6.28, 6.30, 6.25, 6.26, 6.24, 6.29, 6.22, 6.28}
- Soluzione B: {6.27, 6.25, 6.33, 6.27, 6.24, 6.31, 6.28, 6.29, 6.34, 6.27}

Possiamo dire che c'è una differenza significativa nel pH delle due soluzioni al 5% di significatività?

SOLUZIONE

- Assumiamo che i dati dei due campioni provengano da distribuzioni normali con medie μ_X e μ_Y incognite e varianze note $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 0.05^2$.
- Applichiamo il t test appena visto per verificare il sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu_X = \mu_Y$
  - $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$
- Calcoliamo il valore osservato per la statistica del test:

$$z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} = \frac{6.267 - 6.285}{\sqrt{2 \cdot 0.05^2/10}} = -0.805$$

- Con α=5%, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} \cong 1.96$
- Poiché |z| $< z_{\alpha/2}$, non possiamo rifiutare H_0 → non possiamo affermare che i pH delle due soluzioni siano significativamente diversi.

TEST UNILATERALE PER CONFRONTARE LA MEDIA DI DUE POPOLAZIONI NORMALI CON VARIANZA NOTA

Il test appena visto esiste anche nella sua versione unilaterale (o a una coda).

- Sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu_X = \mu_Y$ (o $\mu_X \leq \mu_Y$)
  - $H_1: \mu_X > \mu_Y$

- Regola decisionale:
  - se $\mathrm{Z} > z_\alpha \rightarrow$ rifiutiamo H_0
  - se $\mathrm{Z} \leq z_\alpha \rightarrow$ non possiamo rifiutare H_0

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICARE SE DUE POPOLAZIONI NORMALI HANNO LA STESSA MEDIA – CASO CON VARIANZE INCOGNITE MA UGUALI

- Supponiamo di disporre di due campioni aleatori indipendenti provenienti da due popolazioni normali con medie incognite e varianze incognite ma uguali. In questo caso si dice che le due popolazioni sono **omoschedastiche** (hanno la stessa varianza).

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$
$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

  μ_X, μ_Y → parametri incogniti

  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ → parametro incognito

- Ipotizziamo di voler verificare il sistema di ipotesi bilaterale:
  - $H_0: \mu_X = \mu_Y$
  - $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$
- Possiamo verificare questo sistema di ipotesi usando un **t test per il confronto delle medie di due campioni indipendenti.**

STATISTICA DEL TEST

Si può dimostrare che una buona statistica per questo test è la variabile aleatoria T così definita:

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

dove S_p^2 è detto stimatore «pooled» di σ^2:

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

di fatto una media pesata di S_X^2 e S_Y^2, entrambi stimatori di σ^2:

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}\,)^2\,, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y}\,)^2$$

REGOLA DECISIONALE DEL TEST

Si può dimostrare che quando H_0 è vera, ovvero $\mu_X = \mu_Y$, T è distribuita come una variabile t di Student con n+m-2 gradi di libertà.

$$\text{Se } \mu_X = \mu_Y \rightarrow T \sim t_{n+m-2}$$

La regola decisionale dunque diventa:

- Se $|T| > t_{\frac{\alpha}{2},n+m-2}$ → rifiutiamo H_0 → concludiamo che μ_X e μ_Y sono significativamente diverse
- Se $|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n+m-2}$ → non possiamo rifiutare H_0 → non concludiamo nulla

Oppure, utilizzando il p-value:

$$p - value = P(|T| > |t_{oss}|) = 2 \cdot P(T > |t_{oss}|)$$

dove t_{oss} è il valore osservato per la statistica del test (calcolato sulla base dei dati).

- Se p-value $< \alpha$ → rifiutiamo H_0
- Se p-value $\geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0

VERSIONE UNILATERALE DEL TEST

- Assunzioni:

  $X_1, X_2, \dots, X_n \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

μ_X, μ_Y → parametri incogniti

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ → parametro noto

- Sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$
  - $H_1: \mu_X > \mu_Y$

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

- Regola decisionale:
  - Se $\mathrm{T} > t_{\alpha, n+m-2}$ → rifiutiamo H_0 → concludiamo che μ_X è significativamente maggiore di μ_Y
  - Se $\mathrm{T} \leq t_{\alpha, n+m-2}$ → non possiamo rifiutare H_0 → non concludiamo nulla
- Regola decisionale basata sul p-value:

$$p - value = P(T > t_{oss})$$

  - Se p-value $< \alpha$ → rifiutiamo H_0
  - Se p-value $\geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0

ESERCIZIO 3

Un gruppo di 22 volontari presso un centro di ricerca medica viene esposto a vari tipi di virus influenzali e tenuto sotto controllo medico. Ad un campione casuale di 10 volontari viene somministrato un integratore con 4 grammi di vitamina C al giorno. Agli altri 12 volontari viene somministrato un placebo non distinguibile dall'integratore. Per ciascun soggetto viene registrata la durata della malattia in giorni. I dati raccolti sono:

- Trattati con vitamina C: {5.5, 6.0, 7.0, 6.0, 7.5, 6.0, 7.5, 5.5, 7.0, 6.5}
- Trattati con placebo: {6.5, 6.0, 8.5, 7.0, 6.5, 8.0, 7.5, 6.5, 7.5, 6.0, 8.5, 7.0}

Si può concludere che l'assunzione di 4 grammi di vitamina C al giorno abbia accorciato il decorso medio della malattia, con un livello di significatività al 5%?

SOLUZIONE

- Assumiamo che i dati dei due campioni provengano da distribuzioni normali con medie μ_c e μ_p incognite e varianze incognite ma uguali $\sigma_c^2 = \sigma_p^2 = \sigma^2$.
- Applichiamo il t test appena visto per verificare il sistema di ipotesi:
  - $H_0 \colon \mu_c = \mu_p$
  - $H_1 \colon \mu_p > \mu_c$
- Calcoliamo il valore osservato per la statistica del test:

$$t_{oss} = \frac{\overline{X_p} - \overline{X_c}}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{7.125 - 6.450}{\sqrt{0.689} \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}} = 1.90$$

Con α=5%, $t_{\alpha,n+m-2} = t_{0.05,20} \cong 1.725$

- Poiché $t_{oss} > t_{\alpha,n+m-2}$, possiamo rifiutare H_0 → la somministrazione di vitamina C ha ridotto significativamente la durata della malattie rispetto al gruppo placebo.

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICARE SE DUE POPOLAZIONI NORMALI HANNO LA STESSA MEDIA – CASO CON VARIANZE INCOGNITE E DIVERSE

- Supponiamo di disporre di due campioni aleatori indipendenti provenienti da due popolazioni normali con medie incognite e varianze incognite e diverse. In questo caso si dice che le due popolazioni sono **eteroschedastiche** (hanno varianza diversa).

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$
$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

μ_X, μ_Y → parametri incogniti

$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ → parametri incogniti

- Ipotizziamo di voler verificare il sistema di ipotesi bilaterale:
  - $H_0: \mu_X = \mu_Y$
  - $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$
- Questo problema statistico attualmente non ha ancora una soluzione. Ovvero non è ancora stato trovato un test statistico che permette di verificare questa ipotesi per popolazioni normali eteroschedastiche con livello di significatività esattamente pari ad α. → problema noto come il problema di Behrens-Fisher.
- Esistono però dei test che ne danno una soluzione approssimata. Uno di questi è il **t test di Welch.**

T TEST DI WELCH

- Statistica del test:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

- Distribuzione della statistica del test quando vale l'ipotesi nulla:

$$T \sim t_\nu$$

$$\nu \approx \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{S_X^4}{n^2(n-1)} + \frac{S_Y^4}{m^2(m-1)}}$$

- Regola decisionale:
  - Se $|T| > t_{\frac{\alpha}{2},\upsilon}$ → rifiutiamo H_0
  - Se $|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2},\upsilon}$ → non possiamo rifiutare H_0

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

IL CASO IN CUI ABBIAMO COPPIE DI DATI

- Supponiamo di disporre di un insieme di n coppie di dati:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$$

- In altre parole, stiamo osservando due campioni di dati, **X** e **Y**, dipendenti tra loro, per cui ad ogni elemento del campione **X**, corrisponde un elemento del campione **Y**.

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$
$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

- Per esempio i due campioni potrebbero rappresentare gli esiti di due misurazioni effettuate sulle stesse unità statistiche.

ESEMPIO

- Esempio: vogliamo valutare l'efficacia di un programma di attività fisica sulla riduzione dell'indice di massa corporea (BMI) in soggetti obesi. Reclutiamo 50 soggetti obesi e misuriamo il loro BMI al reclutamento e dopo il completamento del programma di attività fisica. Otteniamo due campioni di dati appaiati: il primo campione, **X**, contiene le misure di BMI al reclutamento; il secondo campione, **Y**, contiene le misure di BMI raccolte per gli stessi soggetti del campione **X** al completamento del programma di attività fisica. Ipotizziamo di voler verificare se il programma di attività fisica ha avuto un impatto significativo dal punto di vista statistico sul BMI. Che test possiamo usare?
- I test che abbiamo visto finora ipotizzano che i due campioni siano indipendenti, non sono quindi appropriati quando si analizzano coppie di dati.

IL T TEST PER DATI APPAIATI (1/3)

- Un test che potremmo usare per rispondere alla domanda dell'esempio precedente è il **t test per dati appaiati.**
- Supponiamo che i due campioni di dati appaiati siano:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$
$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

- Si definiscono n variabili aleatorie $W_i, i = 1, \dots, n$ pari alla differenza tra gli elementi di X e i rispettivi elementi di Y:

$$W_i = X_i - Y_i$$

- Il test assume che le variabili W_i siano normali di media μ_W e varianza σ_W^2 entrambe incognite.

IL T TEST PER DATI APPAIATI (2/3)

- Si definisce poi il seguente sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu_W = 0 \rightarrow \mu_X = \mu_Y$
  - $H_1: \mu_W \neq 0 \rightarrow \mu_X \neq \mu_Y$

Applicato al nostro esempio:
- se vale H_0 → il programma di attività fisica non ha avuto un impatto sul BMI medio.
- se vale H_1 → il programma di attività fisica ha portato ad una variazione significativa del BMI medio.

- Statistica del test:

$$T = \frac{\bar{W}}{S_W}\sqrt{n}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \,, \qquad S_W = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \bar{W}\,)^2$$

IL T TEST PER DATI APPAIATI (3/3)

- Se vale l'ipotesi nulla, ovvero $\mu_W = 0$, la statistica del test ha distribuzione t di Student con n-1 gradi di libertà.

$$T \sim t_{n-1}$$

- Regola decisionale:
  - Se $|T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ → rifiutiamo H_0
  - Se $|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ → non possiamo rifiutare H_0

ESERCIZIO 4 (DA PROVARE A CASA)

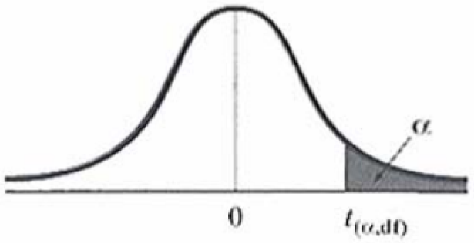
A 10 donne incinte è stata somministrata una iniezione di ossitocina per stimolare il travaglio. Le pressioni sanguigne sistoliche immediatamente prima e dopo la somministrazione sono state:

Paziente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prima	134	122	132	130	128	140	118	127	125	142
Dopo	140	130	135	126	134	138	124	126	132	144

Con un livello di significatività al 5%, possiamo dire che l'ossitocina ha alterato in modo significativo la pressione sistolica?

TABELLA DEI QUANTILI DELLA T DI STUDENT

Tavola della distribuzione T di Student



Gradi di libertà	Area nella coda di destra								
	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICA DI IPOTESI SULLA VARIANZA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE

- Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione aleatorio con distribuzione normale avente media μ e varianza σ^2 entrambe incognite. Supponiamo di voler verificare un'ipotesi sul valore della varianza del tipo:
  - $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
  - $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Statistica del test: $Y = \frac{S^2}{\sigma_0^2}(n-1)$
- Quando vale l'ipotesi nulla Y è una chi-quadro con n-1 gradi di libertà:

$$Y \sim \chi^2_{n-1}$$

- Regola decisionale:
  - Se $Y < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ o $Y > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ → rifiutiamo H_0
  - Se $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq Y \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ → non possiamo rifiutare H_0

ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICARE SE DUE POPOLAZIONI NORMALI HANNO LA STESSA VARIANZA (1/2)

- Supponiamo di disporre di due campioni aleatori indipendenti provenienti da due popolazioni normali con medie incognite e varianze incognite.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$
$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- Ipotizziamo di voler verificare il sistema di ipotesi bilaterale:
  - $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$
  - $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
- Possiamo verificare l'ipotesi usando la statistica del test così definita:

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

VERIFICARE SE DUE POPOLAZIONI NORMALI HANNO LA STESSA VARIANZA (2/2)

- Quando vale H_0, F ha distribuzione F di Fisher con n-1 ed m-1 gradi di libertà:

$$F \sim F_{n-1,m-1}$$

- Possiamo dunque verificare l'ipotesi del test usando questa regola decisionale:
  - Se $\mathrm{F} < F_{1-\frac{\alpha}{2},n-1,m-1}$ o $F > F_{\frac{\alpha}{2},n-1,m-1}$ → rifiutiamo H_0
  - Se $F_{1-\frac{\alpha}{2},n-1,m-1} \leq F \leq F_{\frac{\alpha}{2},n-1,m-1}$ → non possiamo rifiutare H_0