$a > 1$

$a^x > 0$

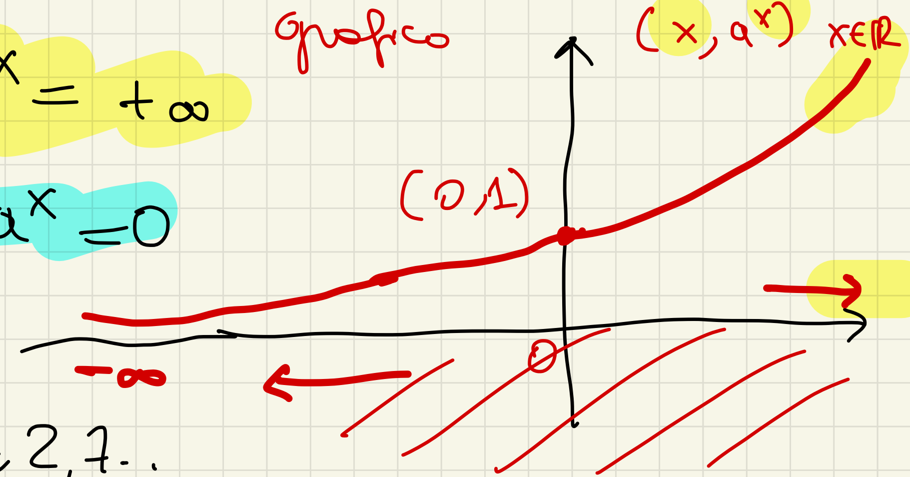
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

In particolare $a = e \approx 2,7\ldots$

Grafico



man mano che

x va verso $-\infty$

a^x va verso 0

limiti della funzione $f(x) = \lg x$

$D = (0, +\infty)$

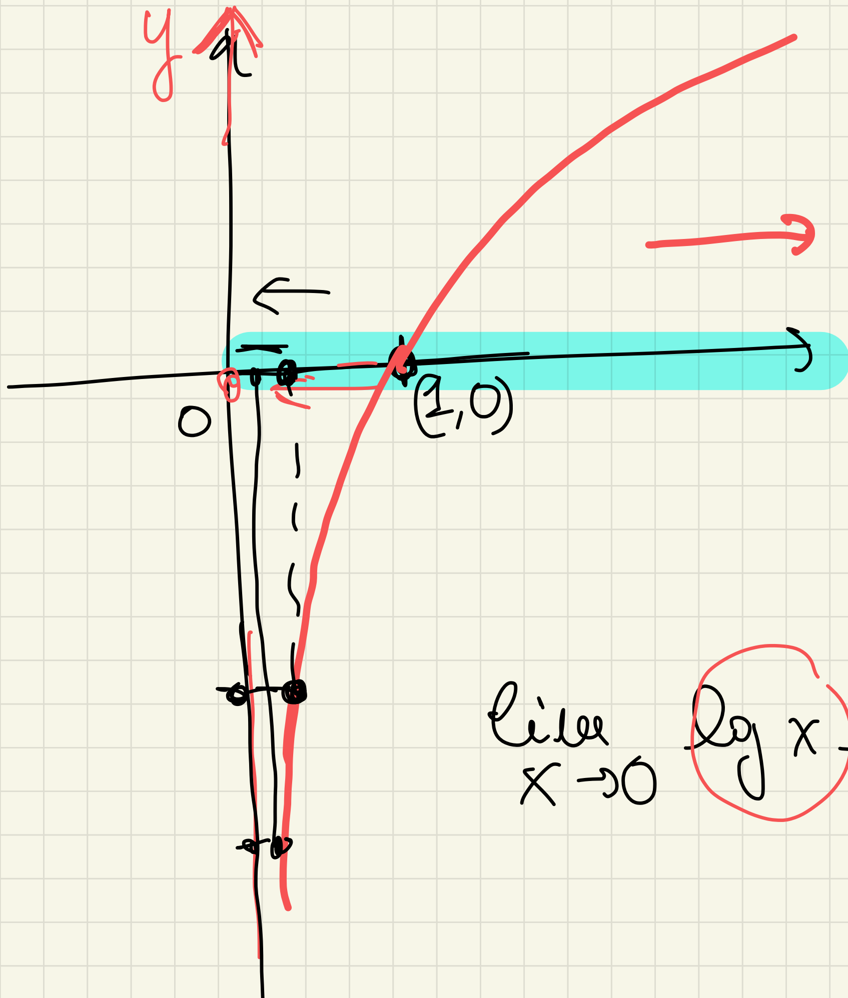
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \lg x = \lg x_0 \qquad x_0 > 0}$$

(continuità)

$$\lim_{x \to +\infty} \lg x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \lg x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to L} f^{-1}(x) = x_0 \right]$$



$(x, \log x)$

$\underbrace{x>0}$ perché $x \in D$!

$(1, \log 1) = (1, 0)$

$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$

Teorema (LIMITE del RECIPROCO)

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D$ e di accumulazione

(1) se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = L \neq 0$ allora $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$

(2) se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = +\infty$ $\quad -\infty$ allora $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{1}{f(x)} = 0$

(3) se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty}} f(x) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \in I(x_0 - r, x_0 + r)$ per qualche $r > 0$ fissato

per $x > M$

allora $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty}} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

4) se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = 0$ e esiste $r > 0$ tale che

$f(x) < 0$ $\quad x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$

allora $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

La stessa proprietà vale per limiti $+\infty$, $-\infty$

Limiti di $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{2^x}_{\to +\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\underbrace{2^x}_{\to 0}} = +\infty$$

$2^x > 0 \; ! \; \forall x$

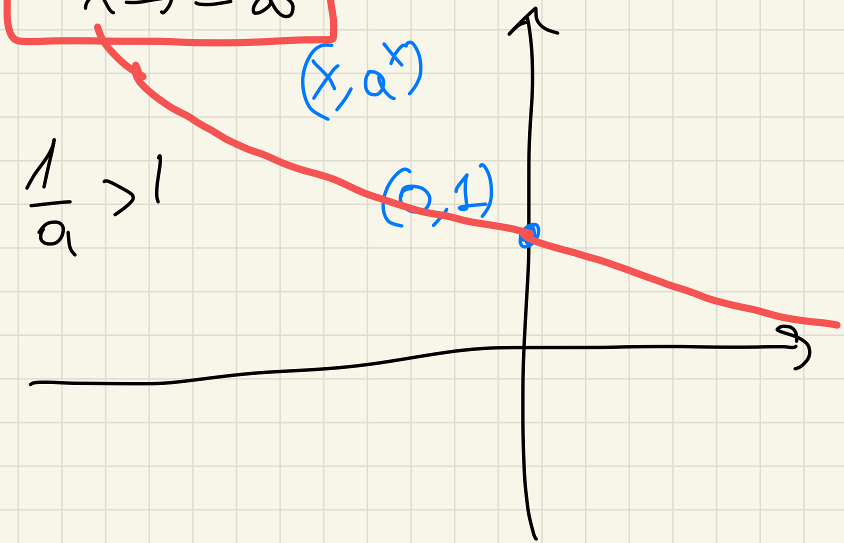
Se $0 < a < 1$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} a^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty}$$

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

$$\frac{1}{a} > 1$$



$a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$

Limite di $\frac{1}{x^n} = f(x)$ $\qquad D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x \neq 0$

$\forall x_0 \neq 0 \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ (continua)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{x^n}_{\to +\infty}} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

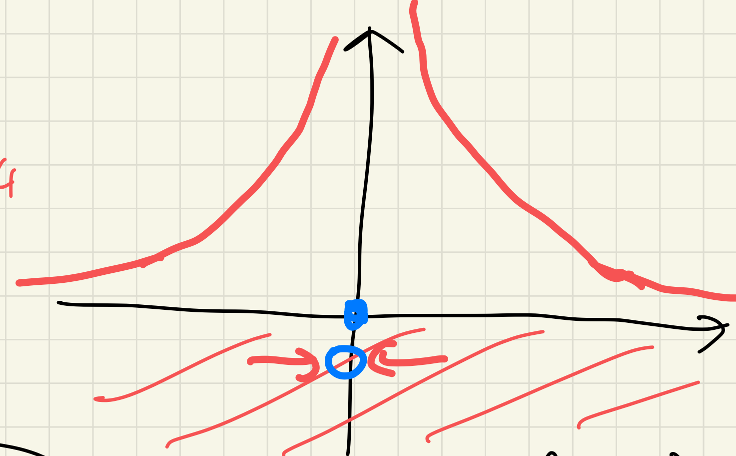
n pari $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

n dispari $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}$$

n pari

es $f(x) = \frac{1}{x^4}$



$$\boxed{\lim_{x \to 0} x^n = 0^n = 0}$$

se n è pari $\frac{1}{x^n} > 0$ $\forall x \neq 0$

$\left(x, \frac{1}{x^n}\right)$

Se n è pari $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$x^n \to 0$ $\frac{1}{x^n} > 0$

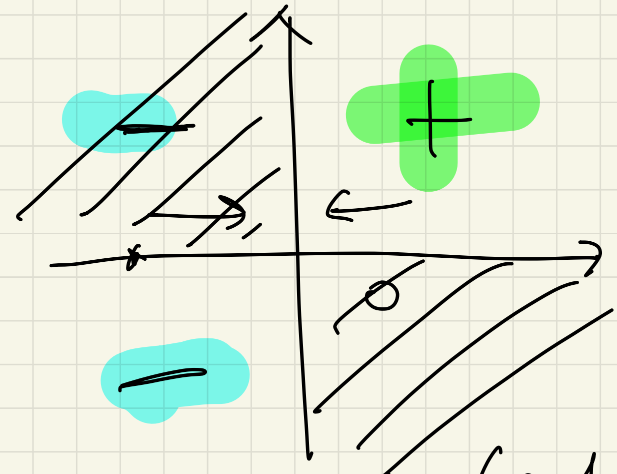
anche $\frac{1}{|x|} = f(x)$ $\quad \frac{1}{|x|} > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$

sono rimaste fuori

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \text{con } n \text{ dispari}$$



esempio $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$

$\left(x, \frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{x} > 0$ per $x > 0$ $\quad \frac{1}{x} < 0$ per $x < 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$$

NON ESISTE

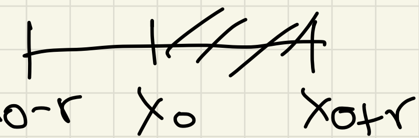
Definizione (LIMITI DESTRI E SINISTRI)

$$f : D \to \mathbb{R}$$

(x_0 è di accumulazione per D se ogni intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ contiene pti di D diversi da x_0)

Assumo che x_0 soddisfi questa proprietà:

per OGNI $r > 0$ l'intervallo $(x_0, x_0 + r)$ contiene pti di D.



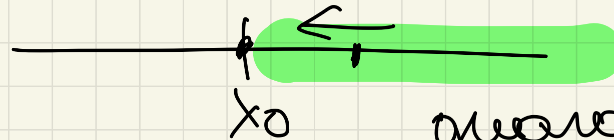
e definisco

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

(limite DESTRO per per x che tende a x_0)

$\updownarrow$



guardo solo quello che succede a DESTRA di x_0

(considero solo $x > x_0$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0$

se $x \in D \cap (x_0, x_0 + r)$

allora

$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

$(f(x) \approx L)$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$ se $\forall M > 0 \quad \exists r > 0$

$\forall x \in D \cap (x_0, x_0 + r)$

$f(x) > M$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$ se $\forall M > 0 \ \exists r > 0$ t.c.

$\forall x \in D \cap (x_0, x_0 + r) \quad f(x) < -M$ -

LIMITE SINISTRO

assumo che x_0 soddisfi la proprietà che

$\forall r>0$ l'intervallo (x_0-r, x_0) contiene pti di D.

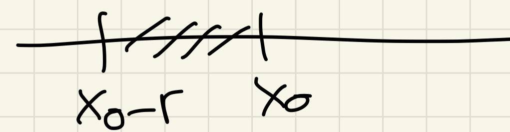
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists r>0$ tale che

$x \in D \cap (x_0-r, x_0)$

$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

(limite SINISTRO
quando solo quello
che succede a SINISTRA
di x_0, cioè $x<x_0$



analogam.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

OSS 1 se x_0 soddisfa entrambe le proprietà:

$$(\forall r>0 \begin{cases} (x_0, x_0+r) \text{ contiene pti di } D \\ (x_0-r, x_0) \text{ contiene pti di } D \end{cases}$$

posso calcolare $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$

① se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ allora è anche $= \lim_{x\to x_0} f(x)$

② se invece $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ NON ESISTE

Oss 2 $\quad f(x) = \lg x \qquad D = (0, +\infty)$

$x_0 = 0$ NON HA la proprietà che $\forall r > 0$ $\nexists$ $(0 - r, 0)$ contiene pti del dominio!

non posso calcolare $\lim_{x \to 0^-} \lg x$ NON HA SENSO

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \lg x} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \lg x} = -\infty .$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$x \to 0$ ma $\frac{1}{x} > 0$ per x a DESTRA di 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$x \to 0$ $\frac{1}{x} < 0$ per x a SINISTRA di 0

per n dispari

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$$