# UNIVERSITA' DI PADOVA

## DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE


**Tutorato di Analisi Matematica I**

**Docente del corso: prof. B.Bianchini**

**Argomento:**

# Il principio di induzione, immagine e controimmagine di funzioni, composizione di funzioni


**Tutor:** Guido Costagliola

**Email:** guido.costagliola@studenti.unipd.it



Anno Accademico: 2024/2025

*"Truth is ever to be found in simplicity,*
*and not in the multiplicity and confusion of things".*

*-Isaac Newton*

# 1 Il principio di induzione

Il *principio di induzione* è un utile strumento matematico che permette di dimostrare che una certa proprietà $\mathcal{P}(n)$ (i.e. una uguaglianza, una disuguaglianza ...) valga $\forall n \in \mathbb{N}$, o comunque $\forall n \geq \overline{n}$ con $\overline{n} \in \mathbb{N}$, ovvero che tale proprietà sia verificata oltre una certa soglia definita da $\overline{n}$.

Tale principio si basa su due passaggi chiave:

1. **Passaggio Base:** si dimostra che $\mathcal{P}(n)$ vale per un caso iniziale, di solito $n = 0$ o $n = 1$;
2. **Passo Induttivo:** supposta vera $\mathcal{P}(k)$ per $k \in \mathbb{N}$, si dimostra che vale anche $\mathcal{P}(k + 1)$.

Se questi due passaggi sono verificati, allora la proprietà $\mathcal{P}(n)$ è dimostrata $\forall n$.

## 1.1 Esercizio 1

Dimostrare le seguenti formule utilizzando il principio di induzione.

1. $\mathcal{P}(n): \;\; 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $\mathcal{P}(n): \;\; 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$;
3. $\mathcal{P}(n): \;\; 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
4. $\mathcal{P}(n): \;\; 2^n \geq n + 1$;
5. $\mathcal{P}(n): \;\; 3^n \geq n^2 + 1$;
6. $\mathcal{P}(n): \;\; 1 + 5 + 9 + ... + (4n + 1) = (2n + 1)(n + 1)$;
7. $\mathcal{P}(n): \;\; n^n \geq n!$;
8. $\mathcal{P}(n): \;\; 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n = 2^n n!$;
9. $\mathcal{P}(n): \;\; n! > 2^n \;\; \forall n \geq 4$.

## 1.2 Esercizio 2

Dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che se $-1 < a < 0$, allora vale
$(1 + a)^n \leq 1 + na + \frac{1}{2}n^2a^2 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

# 2 Funzioni

## 2.1 Esercizio 1

Trovare l'immagine della funzione $f(x)$ su $C$, dove $f$ e $C$ sono di seguito specificati.

1. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad C = (0,1);$
2. $f(x) = \log(e^x + 1), \quad C = \mathbb{R};$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad C = (1,2].$

## 2.2 Esercizio 2

Trovare l'antimmagine (o controimmagine) di $f$ su $C$, denotata con $f^{-1}(C)$, dove $f$ e $C$ sono di seguito specificate.

1. $f(x) = \log x, \quad C = [0,1];$
2. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad C = (0,1];$
3. $f(x) = x^2 + 1, \quad C = [0,2).$

## 2.3 Esercizio 3

Trovare l'espressione della funzione composta $g \circ f$, ove $g(x)$ e $f(x)$ sono le seguenti funzioni.

1. $g(x) = x^2 + x, \quad f(x) = \frac{x-1}{2x+5};$
2. $g(x) = \log(1-x), \quad f(x) = \frac{4x}{x^2+3};$
3. $g(x) = e^{2x}, \quad f(x) = x^2 + 1.$

# Soluzioni

# Principio di induzione

## Esercizio 1

1. Per $n = 1$ si ha $\mathcal{P}(1):\ \ 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$, dunque il passo base è verificato. Sia $n = k$, supponiamo vera $\mathcal{P}(k):\ \ 1+2+...+k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$ e dimostriamo $\mathcal{P}(k+1):$ $1+2+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$. Si ha:
$1+2+...+k+(k+1) = \mathcal{P}(k)+(k+1) = \frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, che è quello che volevamo dimostrare. Dunque $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Notiamo che $\mathcal{P}(n):\ \ 2+4+6+...+2n = 2\cdot(1+2+3+...+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$, dal risultato dell'esercizio precedente.

3. Per $n = 1$ si ha $\mathcal{P}(1):\quad 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1$.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ 1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2 = \mathcal{P}(k)+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}$. Ciò conclude la dimostrazione.

4. Per $n = 1$ si ha $\mathcal{P}(1):\quad 2^1 = 2 \geq 1+1 = 2$, che è verifcata.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ 2^{k+1} = 2^k\cdot 2 \geq 2(k+1) = 2k+2 \geq k+2$, infatti $2k+2 \geq k+2 \iff k \geq 0$ che è vera dato che $k \in \mathbb{N}$.

5. Per $n = 1$ si ha $\mathcal{P}(1):\quad 3^1 = 3 \geq 1^2+1 = 2$, che è verifcata.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ 3^{k+1} = 3^k\cdot 3 \geq 3(k^2+1) \geq (k+1)^2+1$, infatti: $3(k^2+1) = 3k^2+3 \geq k^2+2k+1+1 = 3k^2+2k+2 \iff 2k^2-2k+1 \geq 0$, che è sempre verificata visto che $\Delta = -4 < 0$ e dunque il polinomio è sempre positivo.

6. Per $n = 0$ si ha $\mathcal{P}(0):\quad 1 = 1$, dunque il passo base è verificato.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ 1+5+...+(4k+1)+[4(k+1)+1] = \mathcal{P}(k)+[4(k+1)+1] = (2k+1)(k+1)+4(k+1)+1 = (k+1)(2k+5)+1 = 2k^2+7k+6 = (2k+3)(k+2) = [2(k+1)+1](k+2)$. Ciò conclude la dimostrazione.

7. Per $n = 1$ si ha $\mathcal{P}(1):\quad 1^1 = 1 \geq 1! = 1$, verificata.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ (k+1)^{k+1} = (k+1)^k\cdot(k+1) \geq k^k(k+1) \geq k!(k+1) = (k+1)!$, dove si è usato: $k! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)...2\cdot 1$ e $(k+1)^k \geq k^k$ per $k \in \mathbb{N}$.

8. Per $n = 1$ si ha $\mathcal{P}(1):\quad 2 = 2^1\cdot 1! = 2$, verificata.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ 2\cdot 4\cdot ...\cdot 2k\cdot 2(k+1) = \mathcal{P}(k)\cdot 2(k+1) = 2^k k! 2(k+1) = 2^{k+1}(k+1)!$, che è ciò che volevamo dimostrare.

9. Per $n = 4$ si ha $\mathcal{P}(4):\quad 4! = 24 > 2^4 = 16$, che è verificata.
Sia $n = k$, allora $\mathcal{P}(k+1):\ \ (k+1)! = (k+1)k! > 2^k k! > 2^k\cdot 2 = 2^{k+1}$, dove nel penultimo passaggio si è utilizzato $k \geq 4$ per dire che $k! > 2$. Ciò dimostra che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq 4$.

**Nota:** le dimostrazioni 7. e 9. saranno utili nel calcolo di limiti di successioni ($\longrightarrow$ *gerarchia degli infiniti*).

## Esercizio 2

Cominciamo con il passo base. Per $n = 1$ si ottiene:

$$1 + a \leq 1 + a + \frac{1}{2}a^2 \iff \frac{a^2}{2} \geq 0,$$

che è vero $\forall a \in \mathbb{R}$, ed in particolare nel sottoinsieme di definizione di $a$.

Passiamo al passo induttivo. Supposta la relazione vera per $n = k$:

$$(1 + a)^k \leq 1 + ka + \frac{1}{2}k^2a^2,$$

dimostriamo che la relazione vale anche per $k \longrightarrow (k + 1)$:

$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \leq (1+a)(1+ka+\frac{1}{2}k^2a^2) = 1+ka+\frac{1}{2}k^2a^2+a+ka^2+\frac{1}{2}k^2a^3 = 1+(k+1)a+\frac{1}{2}(k^2+2k)a^2+\frac{1}{2}k^2a^3 \leq 1+(k+1)a+\frac{1}{2}(k^2+2k)a^2 = 1+(k+1)a+\frac{1}{2}(k^2+2k+1-1)a^2 = 1+(k+1)a+\frac{1}{2}(k+1)^2a^2-\frac{a^2}{2} \leq 1+(k+1)a+\frac{1}{2}(k+1)^2a^2,$

e ciò completa la dimostrazione.
In particolare è stato utilizzato che $a^3 < 0$, che $a^2 > 0$ e si è effettuato un completamento a quadrato sommando e sottraendo un 1 per ottenere $(k + 1)^2$.

# Funzioni

## Esercizio 1

1. Per $x \longrightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$, allora $-\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty$, per $x \longrightarrow 1$, $f(x) \longrightarrow 0$. La funzione è continua e crescente in $C$, allora $f(C) = (-\infty, 0)$.

2. Per $x \longrightarrow -\infty$, $e^x \longrightarrow 0$, dunque $f(x) \longrightarrow \log(1) = 0$. Per $x \longrightarrow +\infty$, $e^x \longrightarrow +\infty$ e allora $f(x) \longrightarrow +\infty$. La funzione esponenziale $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è anche continua e crescente, allora $f(x) > \log(1) = 0$, continua e crescente. Si conclude pertanto $f(C) = (0, +\infty)$.

3. Per $x \longrightarrow 1^+$, $f(x) \longrightarrow +\infty$, per $x \longrightarrow 2$, $f(x) \longrightarrow \frac{5}{3}$. Per $x \longrightarrow +\infty$, $f(x) \longrightarrow 1$. La funzione $f(x)$ è continua e decrescente per $x > 1$, allora $f(C) = [\frac{5}{3}, +\infty)$.

## Esercizio 2

1. Si ha $\log x = 0 \iff x = 1$ e $\log x = 1 \iff x = e$. La funzione è continua e crescente. Si conclude quindi che $f^{-1}(C) = [1, e]$.

2. Si ha $\sqrt{1 + x} = 0 \iff x = -1$ e $\sqrt{1 + x} = 1 \iff x = 0$. La funzione è continua e crescente. Si conclude quindi che $f^{-1}(C) = (-1, 0]$.

3. L'uguaglianza $x^2 + 1 = 0$ non è mai verificata nei reali, invece $x^2 + 1 = 2 \iff x = \pm 1$. La funzione è pari (stesso comportamento per $x$ positivi e negativi), continua e crescente. Allora $f^{-1}(C) = (-1, 1)$.

## Esercizio 3

1. $g \circ f = g(f(x)) = \left(\frac{x-1}{2x+5}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2x+5}\right) = \frac{(x-1)^2+(x-1)(2x+5)}{(2x+5)^2} = \frac{(x-1)(3x+4)}{(2x+5)^2} = \frac{3x^2+x-4}{(2x+5)^2}$.
2. $g \circ f = g(f(x)) = \log(1 - \frac{4x}{x^2+3})$.
3. $g \circ f = g(f(x)) = e^{2x^2+2}$.