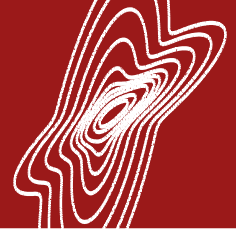


**METODI STATISTICI PER LA BIOINGEGNERIA (B)**

**PARTE 5: VERIFICA DELLE IPOTESI MEDIANTE  
TEST STATISTICI PARAMETRICI (PRIMA PARTE)**

**A.A. 2024-2025**

**Prof. Martina Vettoretti**



# VERIFICA DELLE IPOTESI

Supponiamo di disporre di un campione aleatorio proveniente da una distribuzione parzialmente nota o incognita.

➤ **Campione aleatorio:**  $n$  variabili aleatorie iid con funzione di distribuzione  $F_X(x)$ :

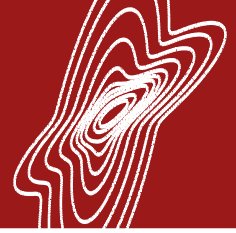
$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

di cui noi osserviamo una realizzazione:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$F_X(x)$  è incognita o parzialmente nota (nota tranne che per alcuni parametri incogniti).

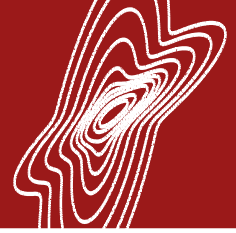
**Obiettivo:** utilizzare una realizzazione del campione aleatorio, ovvero un insieme di dati, per **verificare** qualche **ipotesi** riguardo  $F_X(x) \rightarrow$  **statistica inferenziale**



# IPOTESI STATISTICA



- Un'**ipotesi statistica** è un'affermazione che riguarda una caratteristica della distribuzione delle variabili aleatorie  $X_i$  del campione aleatorio.
- Non sappiamo a priori se l'ipotesi statistica sia vera o meno.
- **Test statistici per la verifica delle ipotesi:** metodi statistici per verificare un'ipotesi statistica utilizzando i dati di un campione aleatorio.
- Nota: si dice verificare un'ipotesi statistica, ma in realtà i test statistici cercano di **confutare un'ipotesi statistica**, non di provarla.

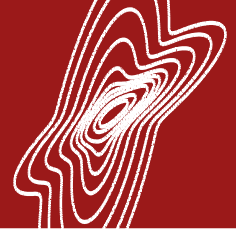


# ESEMPIO



Un'azienda che produce sensori elettrochimici dichiara che il suo nuovo sensore fornisce misure più accurate rispetto al precedente. Un ricercatore, per verificare questa ipotesi, raccoglie un campione di  $N_1$  misure con il nuovo sensore e un campione di  $N_2$  misure con il vecchio sensore. Calcola poi una metrica di accuratezza per ciascuna misura raccolta e analizza i dati dal punto di vista statistico.

- Formulazione di un'ipotesi statistica → Ipotesi: l'accuratezza media del nuovo sensore è uguale all'accuratezza media del sensore precedente.
- Verifica dell'ipotesi (prova di confutazione) → Il ricercatore applica un test statistico per verificare se i dati raccolti sono o meno compatibili con l'ipotesi formulata.



# TEST STATISTICI PARAMETRICI



Quando  $F_X(x)$  è nota a meno di uno o più parametri incogniti, l'ipotesi statistica è un'affermazione che riguarda uno di questi parametri.

**Test statistico parametrico:** test statistico che utilizza i dati di una realizzazione di un campione aleatorio, avente **distribuzione nota a meno di alcuni parametri**, per verificare un'ipotesi statistica che riguarda un parametro incognito di tale distribuzione.

Esempio:

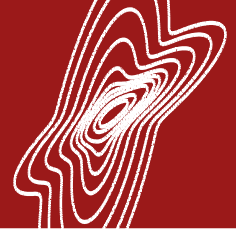
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , iid con  $\mu$  e  $\sigma^2$  incogniti. Ci chiediamo se il valore atteso  $\mu$  può essere pari ad un certo valore  $\mu_0$  oppure no  $\rightarrow$  ipotesi statistica:  $\mu = \mu_0$

Tale ipotesi si può verificare mediante un opportuno test statistico parametrico.

# I PRINCIPALI STEP PER LA COSTRUZIONE DI UN TEST STATISTICO PARAMETRICO (1 / 2)



1. Assunzioni sulla distribuzione delle variabili aleatorie del campione,  $X_i$ 
  - Assumiamo che le  $X_i$  siano iid e abbiano distribuzione  $F_X^\theta(x)$  nota a meno del parametro  $\theta$
2. Formulazione dell'ipotesi statistica, detta anche **ipotesi nulla**,  $H_0$ , riguardo  $\theta$ 
  - Esempi di ipotesi nulla:
    - $H_0: \theta = \theta_0$      dove  $\theta_0$  è una costante, un numero
    - $H_0: \theta \leq \theta_0$
3. Definizione della **statistica del test**, ovvero una variabile aleatoria  $Y$  funzione del campione aleatorio che, se  $H_0$  è vera, ha una certa distribuzione nota, che indichiamo con  $F_{Y|H_0 \text{ vera}}(y|H_0 \text{ vera})$ .
  - $Y = g(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$
  - Se  $H_0$  è vera  $\rightarrow Y \sim F_{Y|H_0 \text{ vera}}$  con  $F_{Y|H_0 \text{ vera}}$  completamente nota



# I PRINCIPALI STEP PER LA COSTRUZIONE DI UN TEST STATISTICO PARAMETRICO (2/2)



4. Definizione del **livello di significatività del test**,  $\alpha$ . Esso rappresenta la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando invece essa è vera.
  - Questo tipo di errore è anche detto **errore di prima specie**.
5. Definizione della **regione critica o regione di rifiuto del test**,  $R$ , a partire da  $F_{Y|H_0}$  vera ed  $\alpha$ .
  - Sia  $y$  il valore assunto dalla statistica del test  $Y$ .
  - La regione critica è un opportuno insieme di numeri reali,  $R$ , tale che se si rifiuta  $H_0$  quando  $y \in R$ , allora la probabilità di commettere un errore di prima specie è  $\alpha$ .
  - La regola decisionale del test sarà dunque:
    - Se  $y \in R$  si rifiuta  $H_0 \rightarrow$  l'esito del test è positivo
    - Altrimenti, se  $y \notin R \rightarrow$  non ci sono sufficienti elementi per rifiutare  $H_0$ . Si dice anche che si «accetta  $H_0$ », ma in realtà in questo caso non si può dire nulla sulla validità di  $H_0$ .  $\rightarrow$  l'esito del test è negativo



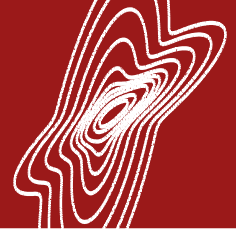
# STEP PER L'APPLICAZIONE DI UN TEST STATISTICO



Principali step per verificare un'ipotesi statistica,  $H_0$ , a partire da una realizzazione di un campione aleatorio  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

1. Scelta di un opportuno test statistico per la verifica di  $H_0$ .
2. Verifica della plausibilità delle assunzioni sulla distribuzione del campione aleatorio, necessarie all'applicazione del test.
3. Scelta del livello di significatività  $\alpha$ . Valori tipici per  $\alpha$  sono 10%, 5%, 1%.
4. Calcolo del valore della statistica del test,  $y$ , a partire dai dati del campione aleatorio.
5. Definizione della regione critica  $R$ .
6. Decisione finale:
  - $y \in R \rightarrow H_0$  è rifiutata
  - $y \notin R \rightarrow$  non ci sono sufficienti elementi per rifiutare  $H_0 \rightarrow H_0$  è «accettata»





# ESITO DI UN TEST STATISTICO



- I test statistici sono messi a punto con lo scopo di rifiutare una certa ipotesi nulla.
- La statistica del test e la regione critica vengono costruite in modo tale che, se  $y \in R$  risulta essere molto improbabile che  $y$  sia una realizzazione di una variabile aleatoria con distribuzione  $F_{Y|H_0}$  vera e pertanto **risulta molto improbabile che  $H_0$  sia vera.**
  - In altre parole, se  $y \in R$ , i dati del campione sono molto poco compatibili con  $H_0 \rightarrow$  abbiamo forti evidenze per rifiutare  $H_0$
  - Per come è costruito il test sappiamo che la probabilità di commettere un errore quando rifiutiamo  $H_0$  è pari ad  $\alpha$ .
- **Se  $y \notin R$ , non abbiamo sufficienti evidenze per dire che  $H_0$  non sia vera, però non possiamo neanche dire che  $H_0$  sia vera.**
  - In altre parole, se  $y \notin R$  **non possiamo fare nessuna inferenza** sulla distribuzione del campione aleatorio.

# ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

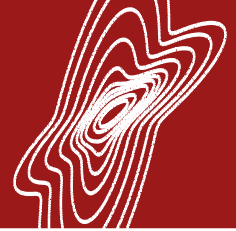


- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

# VERIFICA DI IPOTESI SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA



- Supponiamo di disporre di un campione aleatorio  $X_1, X_2, \dots, X_n$  che ipotizziamo essere estratto da una popolazione **normale** con varianza nota e media (valore atteso) incognita.
- Ipotizziamo di voler verificare un'ipotesi statistica sul valore puntuale della media del tipo  $\mu = \mu_0$ .
- Vediamo passo passo come costruire un test statistico per verificare tale ipotesi.
- Nota: questo lavoro viene generalmente svolto dagli statistici. Noi bioingegneri in genere utilizziamo test statistici già definiti.



# 1. ASSUNZIONI SULLA DISTRIBUZIONE DEL CAMPIONE ALEATORIO



Assumiamo che il campione aleatorio  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sia un campione normale con media (valore atteso) incognita e varianza nota.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n$$

$\mu \rightarrow$  parametro incognito

$\sigma^2 \rightarrow$  parametro noto

## 2. FORMULAZIONE DELL'IPOTESI STATISTICA



Formuliamo l'**ipotesi nulla** come un'ipotesi sul valore puntuale del parametro incognito  $\mu$ :

$$H_0: \mu = \mu_0$$

dove  $\mu_0$  è una costante, un numero.

Il test statistico tenterà di confutare l'ipotesi  $H_0$ , ovvero tenterà di stabilire se ci sono sufficienti evidenze sperimentali per dire che  $H_0$  con alta probabilità non è verificata e quindi accettare la cosiddetta **ipotesi alternativa**  $H_1$ :

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

# 3. DEFINIZIONE DELLA STATISTICA DEL TEST (1 / 2)



- Lo stimatore più naturale della media della distribuzione di un campione aleatorio è dato dalla **media campionaria** delle variabili aleatorie che costituiscono il campione, ovvero:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Infatti, quando abbiamo definito il valore atteso di una variabile aleatoria, abbiamo dimostrato che la media aritmetica di  $n$  realizzazioni di  $X$ , per  $n$  grande, tende a  $E[X]$ .
- Possiamo quindi dire che, se  $n$  è grande, la media aritmetica dei valori di  $n$  variabili aleatorie iid,  $X_i$   $i = 1, \dots, n$ , tenderà al loro valore atteso  $E[X_i]$ .
- Nel nostro caso quindi, per  $n$  grande, si avrà:  $\bar{X} \cong \mu$

# 3. DEFINIZIONE DELLA STATISTICA DEL TEST (2/2)



- Poiché noi vogliamo determinare se  $\mu$  è significativamente diverso dal valore  $\mu_0$ , la quantità che ci interessa valutare è:

$$Y = \bar{X} - \mu_0$$

- Infatti se  $Y$  è sufficientemente grande in valore assoluto, ovvero  $\bar{X}$  è sufficientemente lontano da  $\mu_0$ , potremo dire che è poco probabile che  $\mu = \mu_0$  e quindi rifiutare  $H_0$ .
- Potremmo quindi considerare  $Y$  come statistica del nostro test.
- Tuttavia, per poter essere statistica del test,  $Y$  deve avere un requisito fondamentale: quando  $H_0$  è vera, la distribuzione di  $Y$  deve essere completamente nota.
- Conosciamo la distribuzione di  $Y$ ?

Si può dimostrare che se  $X_i, i = 1, \dots, n$  sono  $n$  variabili aleatorie normali, la loro somma è anch'essa una variabile aleatoria normale con media  $n \cdot \mu$  e varianza  $n \cdot \sigma^2$ :

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad V = \sum_{i=1}^n X_i \quad \longrightarrow \quad V \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$$

Sappiamo inoltre che la trasformazione lineare di una variabile aleatoria normale è ancora una variabile aleatoria normale:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad W = a \cdot X + b \quad \longrightarrow \quad W \sim N(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2)$$

Che applicato al nostro caso significa che:

$$Y = \frac{1}{n} \cdot V - \mu_0, \quad V \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad Y \sim N(\mu - \mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$$



Dunque quando vale l'ipotesi nulla,  $Y$  avrà distribuzione normale con media nulla e varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ :

$$\text{Se vale } H_0: \mu = \mu_0 \quad \longrightarrow \quad Y \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Poiché sappiamo calcolare le probabilità della normale standard, conviene riportarsi al caso di una variabile normale standard. Considereremo dunque come statistica del test la variabile aleatoria  $Z$ :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

sapendo che:

$$\text{Se vale } H_0: \mu = \mu_0 \quad \longrightarrow \quad Z \sim N(0,1) \quad \longrightarrow \quad \text{Completamente nota!}$$

# 4. DEFINIZIONE DEL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA'



Il risultato di un qualsiasi test statistico può essere errato in 2 modi:

- Se si rifiuta  $H_0$ , quando invece  $H_0$  è vera  $\rightarrow$  errore di prima specie
- Se non si rifiuta  $H_0$ , quando  $H_0$  è falsa  $\rightarrow$  errore di seconda specie

Non vi è simmetria tra questi due tipi di errori.

Il test viene costruito in modo da porre un **limite stringente sull'errore di prima specie**, mentre si è molto più tolleranti sull'errore di seconda specie che di fatto non viene controllato.

Ciò si ottiene definendo un **livello di significatività  $\alpha$** , tipicamente pari a 10%, 5% o 1%, e imponendo che le regione critica del test sia tale per cui l'errore di prima specie non possa superare  $\alpha$ .

## 5. DEFINIZIONE DELLA REGIONE CRITICA (1 / 2)



Visto che il nostro obiettivo è determinare se  $\mu$  è significativamente diverso dal valore  $\mu_0$ , e avendo verificato che  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$  ha distribuzione completamente nota quando vale  $H_0$ , possiamo dunque definire la regione critica del test come:

$$R := \{Z: |Z| > c\}$$

ovvero rifiutiamo  $H_0$  se  $\bar{X}$  è troppo lontano da  $\mu_0$ .

# 5. DEFINIZIONE DELLA REGIONE CRITICA (2/2)



Poiché vogliamo che l'errore di prima specie sia  $\alpha$ , dobbiamo scegliere in modo opportuno la costante  $c$  in modo tale che la probabilità che  $Z \in R$  quando vale  $H_0$  sia  $\alpha$ :

$P(|Z| > c) = \alpha, \quad Z \sim N(0,1)$  ← Quando vale  $H_0$ ,  $Z$  è una normale standard.

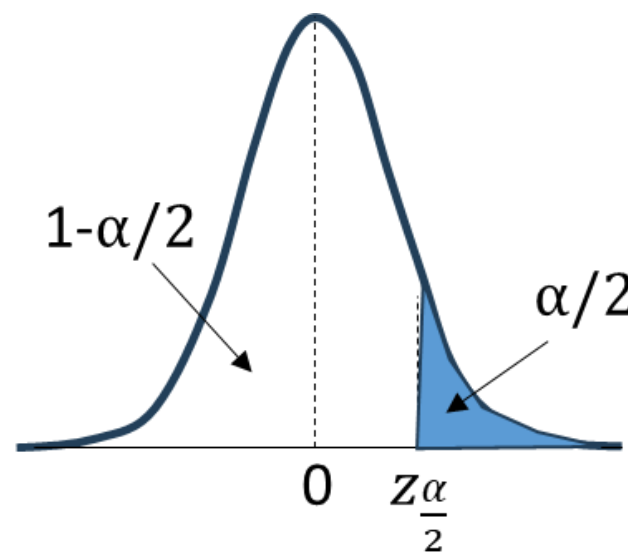
$$P(Z > c) + P(Z < -c) = \alpha$$

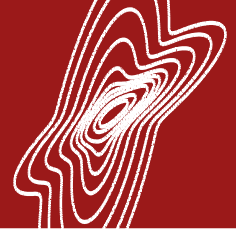
Per la simmetria della ddp normale:

$$2 \cdot P(Z > c) = \alpha$$

$$P(Z > c) = \frac{\alpha}{2}$$

$$c = Z_{\alpha/2}$$





# REGOLA DECISIONALE DEL TEST



Dunque fissato un certo livello di significatività  $\alpha$ , l'esito del test è dato dalla seguente regola decisionale:

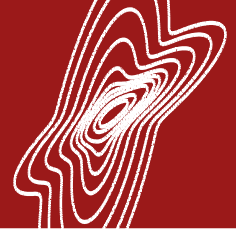
➤ Se  $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \rightarrow$  rifiuto  $H_0$  (quindi accetto  $H_1$ )

➤ Se  $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2} \rightarrow$  non posso rifiutare  $H_0$  (quindi «accetto»  $H_0$ )

# APPLICAZIONE DEL TEST STATISTICO



- Abbiamo visto come è possibile costruire un test statistico per la verifica di un ipotesi sul valore puntuale della media di una popolazione normale con varianza nota.
- Il processo di costruzione di un test statistico è in generale complesso (lo lasciamo fare agli statistici).
- Tipicamente noi bioingegneri applichiamo dei test statistici già esistenti.
- L'applicazione di un test statistico è in generale semplice.
- Vediamo come si applica il test statistico appena costruito.

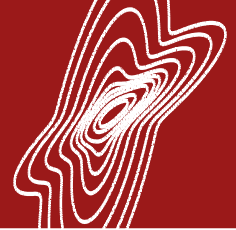


# APPLICAZIONE DEL TEST SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (1 / 2)

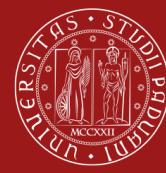


Ipotizziamo di voler applicare il test appena costruito per verificare l'ipotesi  $H_0: \mu = \mu_0$ . Dovremo eseguire i seguenti step.

1. Verifica della plausibilità delle assunzioni del test. Possiamo assumere ragionevolmente che i dati che abbiamo a disposizione,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , provengono da una distribuzione normale? Se sì, ne conosciamo la varianza?
  - Esistono dei metodi per verificare se un campione è approssimativamente normale. Li discuteremo nella prossima lezione.
  - Per ora ipotizziamo che le assunzioni siano ragionevolmente soddisfatte dai dati.
2. Fissiamo un livello di significatività. Per esempio  $\alpha=5\%$ .



# APPLICAZIONE DEL TEST SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (2/2)



3. Calcoliamo il valore osservato della statistica del test a partire dai dati del nostro campione:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4. Definiamo la regione critica. Calcoliamo  $z_{\alpha/2}$  e definiamo R come:

$$R = \{Z: |Z| > z_{\alpha/2}\}$$

- Per esempio, se  $\alpha=5\%$ ,  $z_{\alpha/2}=z_{0.025}\approx 1.96$ .
- La regione critica o regione del rifiuto sarà dunque l'insieme:  $R = \{Z: |Z| > 1.96\}$

5. Applichiamo la regola decisionale per arrivare alla decisione finale:

- Se  $|z| > z_{\alpha/2} \rightarrow$  rifiuto  $H_0$  (quindi accetto  $H_1$ )
- Se  $|z| \leq \frac{z_{\alpha}}{2} \rightarrow$  non posso rifiutare  $H_0$  (quindi «accetto»  $H_0$ )

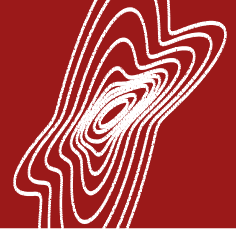


## ➤ Se il test rifiuta $H_0$ :

- Possiamo dire che il campione proviene da una popolazione avente **media  $\mu$  significativamente diversa da  $\mu_0$** .
- Questo perché la media campionaria  $\bar{x}$  risulta talmente diversa da  $\mu_0$  da rendere molto poco probabile l'ipotesi nulla.
- La probabilità che questo esito sia sbagliato è pari ad  $\alpha$ . Ovvero in  $\alpha$  % dei casi il test rifiuterà  $H_0$  per puro caso. In questo caso si dice che si ha un falso positivo.

## ➤ Se il test non rifiuta $H_0$ :

- Non ci sono sufficienti evidenze sperimentali per rifiutare  $H_0$ .
- La media campionaria  $\bar{x}$  non risulta abbastanza diversa da  $\mu_0$  per poter affermare in maniera abbastanza sicura che  $\mu \neq \mu_0$ .
- **Non possiamo dire assolutamente nulla sul valore di  $\mu$ .**



# NOTA IMPORTANTE



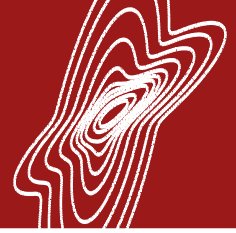
- Quando un test statistico non rifiuta l'ipotesi nulla, e quindi la «accetta», in realtà l'ipotesi nulla e quella alternativa sono da considerarsi entrambe plausibili.
- Cercare di ricavare delle conclusioni sul valore dei parametri incogniti della distribuzione, quando  $H_0$  non è rifiutata, è fondamentalmente sbagliato.

Immaginiamo che all'esame venga chiesto di applicare un test statistico per verificare l'ipotesi nulla  $H_0: \mu = \mu_0$ , e che il test dia esito negativo.

Se qualcuno scrive:

«accetto  $H_0$ , quindi posso concludere che  $\mu = \mu_0$ »

Questo viene considerato un errore grave!!!



# ESERCIZIO

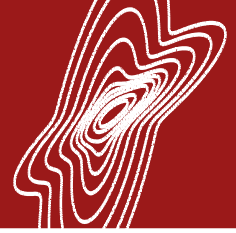


Si richiede che il modulo di elasticità di un certo tipo di fibra sintetica sia pari a 200 MPa. La nostra esperienza passata ci dice che la deviazione standard per questo genere di fibre è di 5 MPa. Per valutare l'idoneità delle fibre prodotte da una certa azienda, se ne analizza un campione di 8 esemplari. I valori del modulo di elasticità misurato per gli 8 esemplari sono:

201 195 197 198 194 202 196 193

Sulla base dei dati a disposizione, cosa possiamo concludere riguardo l'idoneità delle fibre prodotte dall'azienda, se utilizziamo un livello di significatività al 5%?

E se invece utilizziamo un livello di significatività pari al 10%?



# SOLUZIONE (1 / 3)



- Possiamo assumere che i dati provengano da un campione aleatorio normale con media  $\mu$  incognita e deviazione standard  $\sigma = 5$  Mpa.
- Definiamo l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa:
  - $H_0: \mu = 200$  MPa
  - $H_1: \mu \neq 200$  MPa
- Calcoliamo il valore della statistica del test a partire dai nostri dati:
  - $\bar{x} = \frac{1}{8} (201 + 195 + 197 + 198 + 194 + 202 + 196 + 193) = 197$
  - $z = \frac{\bar{x} - 200}{5/\sqrt{8}} = -1.697$

# SOLUZIONE (2/3)



➤ Con livello di significatività  $\alpha=5\%$ :

- Il quantile gaussiano che definisce la regione critica è:  $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} \cong 1.96$
- La regione critica dunque risulta:  $R=\{z: |z| > 1.96\}$ .
- Poiché nel nostro caso  $z = -1.697$ , con  $\alpha=5\%$  **NON possiamo rifiutare l'ipotesi nulla.**



- Con un livello di significatività al 5%, non possiamo concludere che il modulo di elasticità medio delle fibre prodotte dall'azienda sia significativamente diverso dal valore desiderato di 200 MPa.
- Le fibre sono dunque accettabili? Non possiamo dirlo!
  - Ricorda: se non rifiutiamo  $H_0$  non possiamo dire nulla.

# SOLUZIONE (3/3)



- Con livello di significatività  $\alpha=10\%$ :
  - Il quantile gaussiano che definisce la regione critica è:  $Z_{\alpha/2} = Z_{0.05} \cong 1.645$
  - La regione critica dunque risulta:  $R=\{z: |z| > 1.645\}$ .
  - Poiché nel nostro caso  $z = -1.697$ , con  $\alpha=10\%$  **possiamo rifiutare l'ipotesi nulla.**



- Con un livello di significatività al 10%, possiamo concludere che il modulo di elasticità medio delle fibre prodotte dall'azienda sia significativamente diverso dal valore desiderato di 200 MPa.
- Le fibre sono dunque accettabili? Possiamo dire di no.
  - Ricorda: solo se rifiutiamo  $H_0$  possiamo inferire qualcosa sul parametro incognito (in questo caso la media).

# SCELTA DEL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA'



- Nell'esempio appena visto abbiamo verificato come l'esito di un test statistico possa differire semplicemente variando il livello di significatività.
  - Con un livello di significatività più stringente, pari al 5%, non potevamo rifiutare  $H_0$
  - Rilassando il livello di significatività, quindi tollerando un errore di prima specie del 10%, abbiamo potuto rifiutare  $H_0$ .
- Il livello di significatività appropriato da usare nelle varie situazioni dipende di volta in volta dalle circostanze ed è influenzato da diversi fattori.
  - Per esempio, se la decisione di rifiutare  $H_0$  portasse ad un costo elevato, che risulterebbe quindi perso se  $H_0$  fosse in realtà valida, potremmo decidere di usare un basso livello di significatività.

# REGOLA DECISIONALE BASATA SUL P-VALUE (1 / 2)



La regola decisionale che abbiamo derivato per il test statistico sulla media di una popolazione normale con varianza nota è:

- Se  $|z| > z_{\alpha/2} \rightarrow$  rifiuto  $H_0$  (quindi accetto  $H_1$ )
- Se  $|z| \leq z_{\alpha/2} \rightarrow$  non posso rifiutare  $H_0$  (quindi «accetto»  $H_0$ )

dove  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$  è il valore assunto dalla statistica del test  $Z$ .

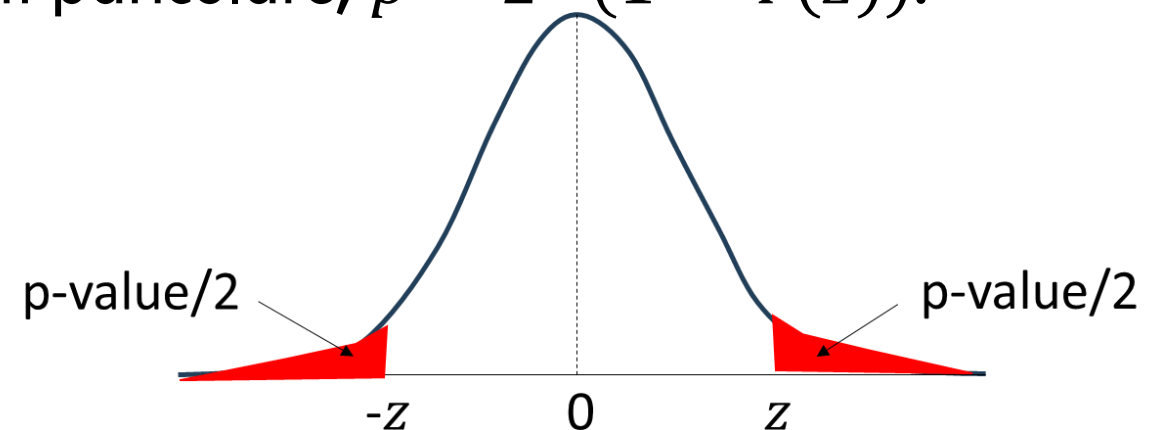
Un modo alternativo di formulare la regola decisionale è quello di calcolare il valore  $p = P(|Z| > |z|)$  e confrontarlo con  $\alpha$ .

Per il test statistico che stiamo considerando, in particolare,  $p = 2 \cdot (1 - \Phi(z))$ .

La regola decisionale quindi diventa:

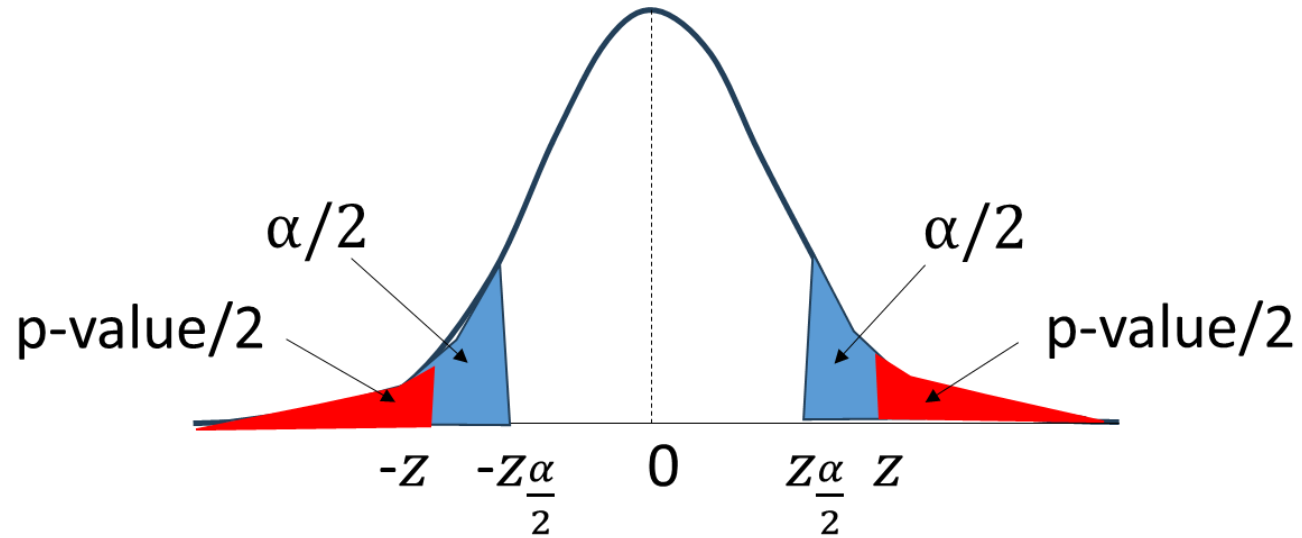
- Se  $p < \alpha \rightarrow H_0$  è rifiutata
- Se  $p \geq \alpha \rightarrow$  non possiamo rifiutare  $H_0$

Il valore  $p$  viene anche detto **p-value**.

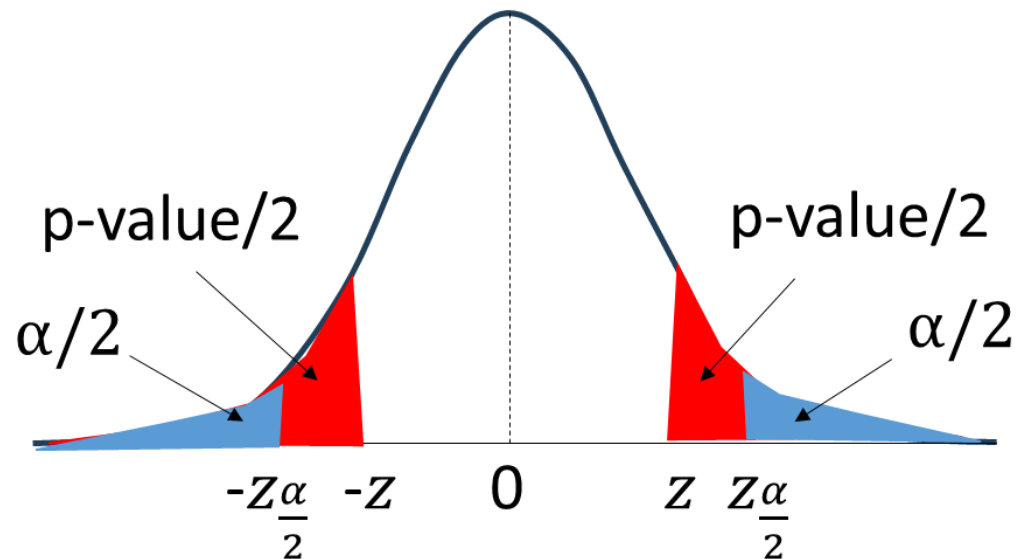




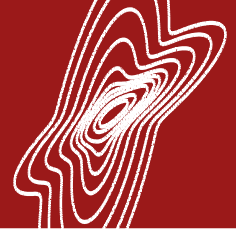
# REGOLA DECISIONALE BASATA SUL P-VALUE (2/2)



$|z| > z_{\alpha/2}$   
o equivalentemente  
 $p\text{-value} < \alpha$   
 $\rightarrow H_0$  è rifiutata



$|z| < z_{\alpha/2}$   
o equivalentemente  
 $p\text{-value} > \alpha$   
 $\rightarrow$  Non si può rifiutare  $H_0$



# IL P-VALUE

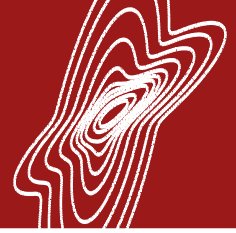


Le funzioni che implementano i test statistici nei vari software di analisi statistica, generalmente restituiscono in uscita il **p-value** calcolato a partire dai dati.

Il p-value in generale rappresenta la probabilità che la statistica del test assuma valori più estremi di quello osservato (quello calcolato a partire dai dati del campione).

Qualsiasi sia il test statistico che stiamo considerando, il p-value può essere utilizzato per decidere se rifiutare o meno  $H_0$ .

- Se  $\text{p-value} < \alpha \rightarrow H_0$  è rifiutata
- Se  $\text{p-value} \geq \alpha \rightarrow$  non ci sono sufficienti elementi per rifiutare  $H_0$



# ROBUSTEZZA DEL TEST



- Il test statistico che abbiamo appena visto assume che il campione aleatorio sia normale. Solo grazie a questa assunzione possiamo conoscere esattamente la distribuzione della statistica del test.
- E se il campione non è normale?
  - Se il numero di dati a disposizione è grande, questo test fornisce risultati approssimativamente corretti anche quando il campione non è normale.
  - Infatti anche se il campione aleatorio non fosse normale, poiché le variabili aleatorie  $X_i$  che costituiscono il campione sono iid, il teorema del limite centrale ci garantisce comunque che la loro somma sia approssimativamente una variabile aleatoria normale con media  $n \cdot \mu$  e varianza  $n \cdot \sigma^2$ .
- Quando un test statistico fornisce un risultato approssimativamente corretto anche quando le sue ipotesi non sono soddisfatte (come in questo caso) si dice che il test è **robusto**.

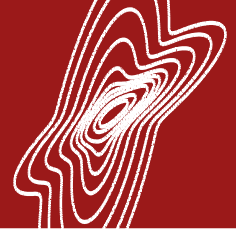
Il test che abbiamo appena costruito per verificare il sistema di ipotesi:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

è un esempio di **test bilaterale** o **a due code**, in quanto l'ipotesi alternativa  $H_1$  è verificata quando  $\mu$  è lontano da  $\mu_0$  in entrambe le direzioni possibili, ovvero sia se  $\mu$  è significativamente maggiore di  $\mu_0$ , sia se  $\mu$  è significativamente minore di  $\mu_0$ .

Nei test a due code, si rifiuta  $H_0$  quando il valore della statistica del test cade in una delle due code della densità di  $Y$  data  $H_0$ .



# TEST STATISTICO UNILATERALE O A UNA CODA

Assumiamo sempre che il nostro campione aleatorio sia normale con varianza nota  $\sigma^2$  e media incognita  $\mu$ . Supponiamo di essere interessati a capire se  $\mu$  è significativamente maggiore di un certo valore  $\mu_0$ . In questo caso, dovremo costruire un test statistico per verificare il sistema di ipotesi:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

In questo caso il test si dice **unilaterale** o **a una coda**, perché l'ipotesi alternativa  $H_1$  è verificata quando  $\mu$  è lontano da  $\mu_0$  in una sola direzione possibile, in questo caso quando  $\mu$  è significativamente maggiore di  $\mu_0$ .

➤ Sistema di ipotesi:

- $H_0: \mu = \mu_0$
- $H_1: \mu > \mu_0$

➤ Anche in questo caso, come statistica del test ci occorre una variabile aleatoria che quantifichi la distanza di  $\mu$  da  $\mu_0$ . Possiamo usare la stessa statistica derivata per il test bilaterale:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

che quando vale  $H_0$  è distribuita come una normale standard.

➤ Questa volta però consideriamo come regione di rifiuto, quell'insieme di valori per cui  $Z$  è una quantità positiva sufficientemente grande.

# TEST STATISTICO UNILATERALE PER VERIFICA DI IPOTESI SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (1 / 2)



- Regione di rifiuto:

$$R := \{Z: Z > c\}$$

ovvero rifiutiamo  $H_0$  se  $\bar{X}$  è tanto maggiore di  $\mu_0$ .

- Poiché vogliamo che il livello di significatività sia  $\alpha$ , dobbiamo imporre che la probabilità di rifiutare  $H_0$  quando  $H_0$  è vera sia pari ad  $\alpha$ , ovvero:

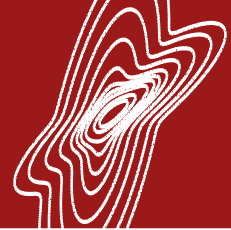
$$P(Z > c) = \alpha, \quad Z \sim N(0,1)$$

- Se vale  $H_0$ ,  $c$  è il quantile gaussiano di probabilità  $\alpha$ :

$$c = z_\alpha$$

- Regola decisionale del test:

- Se  $Z > z_\alpha \rightarrow$  rifiutiamo  $H_0$
- Se  $Z \leq z_\alpha \rightarrow$  non possiamo rifiutare l'ipotesi  $H_0$



# COME SI APPLICA IL TEST?



Dato l'insieme di dati  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , immaginiamo di voler applicare il test appena visto per verificare il sistema di ipotesi:  $H_0: \mu = \mu_0$ ;  $H_1: \mu > \mu_0$ .

1. Verifichiamo la plausibilità dell'assunzione di normalità e di conoscere  $\sigma^2$ .
2. Scegliamo un livello di significatività  $\alpha$ .
3. Calcoliamo il valore della statistica del test per i nostri dati:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4. Definiamo la regione critica:

$$R := \{Z: Z > z_\alpha\}$$

5. Applichiamo la regola decisionale per eventualmente trarre un conclusione:
  - Se  $z > z_\alpha \rightarrow$  rifiutiamo  $H_0$  (possiamo dire che  $\mu$  è significativamente maggiore di  $\mu_0$ )
  - Se  $z \leq z_\alpha \rightarrow$  non possiamo rifiutare l'ipotesi  $H_0$  (non possiamo dire nulla su  $\mu$ )



# REGOLA DECISIONALE BASATA SUL P-VALUE



Anche in questo caso la regola decisionale può essere formulata sulla base del p-value.

- Sia  $z$  il valore osservato per la statistica del test, ovvero il valore della statistica del test calcolato con i dati a disposizione:

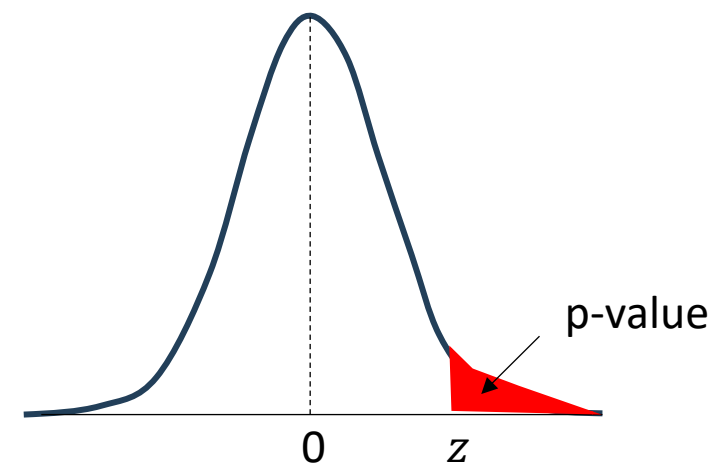
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

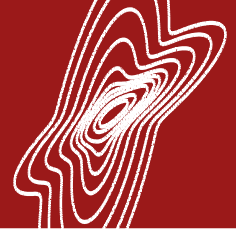
- Definiamo il p-value come la probabilità che  $Z$  assuma valori maggiori di  $z$ :

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P(Z > z) \\ p\text{-value} &= 1 - \Phi(z) \end{aligned}$$

- La regola decisionale dunque diventa:

- Se  $p\text{-value} < \alpha \rightarrow H_0$  è rifiutata
- Se  $p\text{-value} \geq \alpha \rightarrow$  non possiamo rifiutare  $H_0$





# OSSERVAZIONI (1 / 2)



- I test unilaterali si chiamano anche ad una coda, perché rifiutano  $H_0$  quando il valore osservato per la statistica del test è su una sola delle code della sua densità quando vale  $H_0$ .
- Si può dimostrare che il test unilaterale che abbiamo appena visto per verificare il sistema di ipotesi  $H_0: \mu = \mu_0$ ;  $H_1: \mu > \mu_0$  con livello di significatività  $\alpha$  vale anche per verificare il sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu \leq \mu_0$
  - $H_1: \mu > \mu_0$con livello di significatività  $\alpha$ .

# OSSERVAZIONI (2/2)



➤ In maniera analoga a quanto fatto per costruire il test unilaterale appena visto, possiamo costruire un test unilaterale per verificare il sistema di ipotesi:

- $H_0: \mu = \mu_0$
- $H_1: \mu < \mu_0$
- $H_0: \mu \geq \mu_0$
- $H_1: \mu < \mu_0$

In questo caso la regola decisionale sarà:

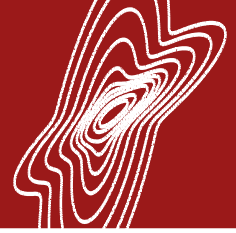
- Se  $z < -z_\alpha \rightarrow$  rifiutiamo  $H_0$  (possiamo dire che  $\mu$  è significativamente minore di  $\mu_0$ )
- Se  $z \geq -z_\alpha \rightarrow$  non possiamo rifiutare l'ipotesi  $H_0$  (non possiamo dire nulla su  $\mu$ )

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

In alternativa posso usare la regola decisionale basata sul p-value:

$$p - \text{value} = P(Z < z) = \Phi(z)$$

- Se  $p\text{-value} < \alpha \rightarrow$  rifiutiamo  $H_0$
- Se  $p\text{-value} \geq \alpha \rightarrow$  non possiamo rifiutare  $H_0$



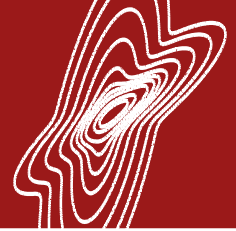
# ESERCIZIO



Si richiede che il modulo di elasticità di un certo tipo di fibra sintetica sia almeno pari a 200 MPa. La nostra esperienza passata ci dice che la deviazione standard per questo genere di fibre è di 5 MPa. Per valutare l'idoneità delle fibre prodotte da una certa azienda, se ne analizza un campione di 8 esemplari. I valori del modulo di elasticità misurato per gli 8 esemplari sono:

201 195 197 198 194 202 196 193

Sulla base dei dati a disposizione, possiamo concludere che le fibre prodotte dall'azienda non sono idonee utilizzando un livello di significatività al 5%?



# SOLUZIONE



- Possiamo assumere che i dati provengano da un campione aleatorio normale con media  $\mu$  incognita e deviazione standard  $\sigma = 5$  Mpa.
- Definiamo l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa:
  - $H_0: \mu \geq 200$  MPa
  - $H_1: \mu < 200$  MPa
- Calcoliamo il valore della statistica del test a partire dai nostri dati:
  - $\bar{x} = \frac{1}{8} (201+195+197+198+194+202+196+193) = 197$
  - $z = \frac{\bar{x}-200}{5/\sqrt{8}} = -1.697$
- Questa volta usiamo la regola decisionale basata sul p-value:
  - $p - value = P(Z < z) = \Phi(z) = \Phi(-1.697) = 1 - \Phi(1.697) \cong 1 - 0.955 = 0.045$
  - Poiché il p-value è minore di 0.05 (ovvero il nostro livello di significatività), **possiamo rifiutare l'ipotesi nulla**. → concludiamo che le fibre non sono idonee in quanto il loro modulo di elasticità medio è significativamente minore di 200 MPa