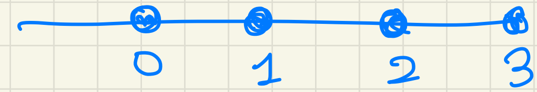
f è continua in x_0 (ove $x_0 \in D$ e x_0 è di accum. per D)

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(e f è continua nel suo dominio se f è continua in x_0, $\forall x_0 \in D$, di accum. per D.

Successione

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$



è una funzione con dominio $\mathbb{N}$ (o un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{N}$).

$\downarrow$

per una successione (= una funzione che ha dominio $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme illimitato) NON HA SENSO PARLARE di continuità

perché non ci sono pti del DOMINIO che sono di accumulazione per il DOMINIO.

Teorema

Le funzioni potenze $x \longrightarrow x^n$ $D = \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n$ $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

radici $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ $\rightarrow$ $D = \mathbb{R}$ n DISP

$D = [0, +\infty)$ n PARI

esponenziali $x \longrightarrow a^x$ con $a \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}$ $a > 0,\ a \neq 1$

logaritmiche $x \longrightarrow \lg x$ $D = (0, +\infty)$

$D = [-1, 1]$

$x \rightarrow \arcsin x$

$x \rightarrow \operatorname{arctg} x$

$D = \mathbb{R}$

trigonom $x \longrightarrow \sin x$ $D = \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \cos x$ $D = \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \operatorname{tg} x$ $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

SONO TUTTE CONTINUE NEL LORO DOMINIO

fisso $a = 2$ $\qquad \lim_{x \to x_0} 2^x = 2^{x_0}$

$$2^{x_0} = L$$

<u>Teorema</u> se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è continua in D e ammette funzione inversa allora anche l'inversa è continua

$$f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in D_f \;\Big/\; f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in D_{f^{-1}}$$

Se f e f^{-1} sono inverse una dell'altra

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to L} f^{-1}(x) = x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = L = e^{x_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to L} \lg x = x_0$$

$L = e^{x_0}$

$x_0 = \lg L = \lg e^{x_0}$

Def $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}$

D è ILLIMITATO SUPERIORMENTE
(D non ha estremo superiore)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$ se è vero che

$\forall \varepsilon > 0$ trovo un valore $M > 0$ tale che

se $\underbrace{x \in D, \ x > M}$, allora $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$(f(x) \simeq L)$

Dillimitato superiormente

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ $\quad$ [$\forall \varepsilon>0$ $\exists M>0$ tale che se $x>M,\ x\in D$ allora $f(x)\in(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$]

$f(x)\approx L$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ [$\forall M>0$ $\exists N>0$ tale che $x>N$ $x\in D$ $f(x)>M$]

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ [$\forall M>0$ $\exists N>0$ tale che se $x>N$ $x\in D$ $f(x)<-M$]

D illimitato inferiormente

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0$ tale che se $x \in D \quad x < -M$

$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$f(x) \approx L$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0 \quad \exists N > 0$ tale che se $x \in D \quad x < -N$ allora $f(x) > M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall M > 0 \quad \exists N > 0$ tale che se $x \in D \quad x < -N$ allora $f(x) < -M$

LIMITI FUNZIONI SEMPLICI

1) $f(x) = x^n$ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\boxed{n \text{ pari}}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ (continuità)

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

$\boxed{n \text{ dispari}}$

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

2) radici $f(x) = \sqrt[n]{x}$

$\boxed{n \text{ pari}}$ $D = [0, +\infty)$

$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \quad \forall x_0 \geq 0$ continuità

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

$\boxed{n \text{ dispari}}$ $D = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$.

③ $x \to \sin x$

$x \to \cos x$

$D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 .$$

(per continuità)

i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ per $\sin x$ e $\cos x$ NON ESISTONO perchè sono funzioni periodiche.

④ $x \longrightarrow \arcsin x$ $\qquad D = [-1, 1]$

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin(x_0) \qquad \forall x_0 \in [-1, 1]$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \to 1} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to -1} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

5) $f(x) = a^x \qquad a > 0 \qquad a \neq 1 \qquad D = \mathbb{R}$

se $a > 1$ es esempio $f(x) = 2^x$

a^x è F. MONOTONA STRETT. CRESCENTE $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{continuità}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} a^x = 0}$$

Controllo che sia vero, scelgo $\boxed{a=2}$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x \stackrel{?}{=} 0 = L$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ tale che $x \in D$ $x < -M$ allora $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

fisso $\varepsilon > 0$ e voglio capire per quali $x \in D = \mathbb{R}$

$$0 - \varepsilon < f(x) < 0 + \varepsilon$$

$$\underbrace{-\varepsilon < 2^x}_{} < \varepsilon$$

vero sempre $2^x > 0$.

$$\underbrace{2^x}_{} \stackrel{?}{<} \varepsilon = \underbrace{2^{\log_2 \varepsilon}}_{}$$

$$M = -\log_2 \varepsilon$$

$$\underline{x < \log_2 \varepsilon} < 0$$