SISTEMI NEL DOMINIO DEL TEMPO

<u>DEFINIZIONE</u> Un <u>sistema</u> è un operatore che trasforma un <u>segnale</u> in un altro <u>segnale</u>

Sia $\mathcal{X}$ un insieme di segnali ed $\mathcal{Y}$ un altro insieme di segnali

Ogni operatore $\quad T : x \in \mathcal{X} \longrightarrow T[x] = y \in \mathcal{Y}$

è un sistema

<u>Nota</u> $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ non devono coincidere, né essere spazi vettoriali; né essere entrambi T.c. o T.d.

<u>Esempi</u>

1) $\mathcal{X} = \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Y} = \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R})$, $\quad T[x] = x'$ $\quad$ (derivatore]

2) $\mathcal{X} = \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Y} = \mathcal{L}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = x(t-1)$ $\quad$ [ritardo

3) $\mathcal{X} = \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Y} = \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R})$, $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ $\quad$ [integratore

4) $\mathcal{X} = \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Y} = \ell^{\infty}$, $\quad \forall n \in \mathbb{Z},\ y(n) = x(nT)$, $T \in \mathbb{R}_0^+$ $\quad$ (campionatore

<u>Importante</u> Un sistema trasforma un <u>intero segnale</u> in un altro segnale. Quindi la notazione $y(t) = T[x(t)]$ può essere fuorviante perché sembra che il <u>valore</u> $y(t)$ dipenda solo dal valore $x(t)$

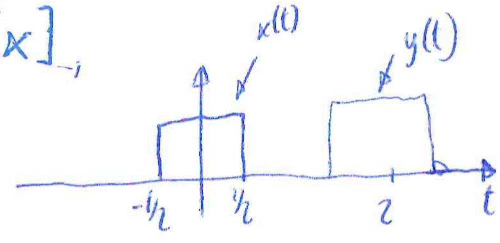
Sistemi notevoli e T.c.

1) Ritardo $\mathcal{U}_\beta$

$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad y = \mathcal{U}_\beta[x] \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = x(t-\beta)$

Esempio 1 Se $x = \text{rect}$ e $y = \mathcal{U}_2[x]$,

allora $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \text{rect}(t-2)$



Lemma x è periodico di periodo T se e solo se $x = \mathcal{U}_T[x]$

x periodico di periodo $T \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ x(t) = x(t-T) \iff x = \mathcal{U}_T[x]$ C.V.D.

2) Cambio scala $\mathcal{S}_\alpha$

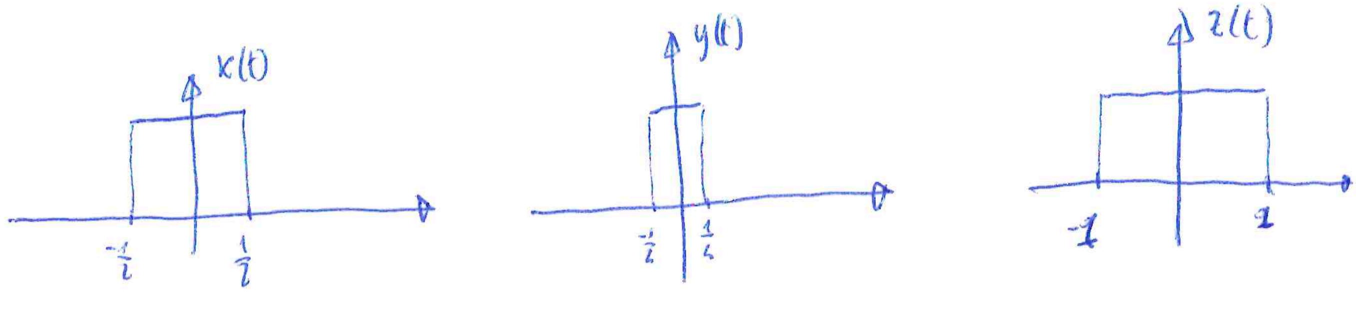
$\forall \alpha \in \mathbb{R}_0 \quad , \ y = \mathcal{S}_\alpha[x] \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = x(\alpha t)$

Esempio 1 Se $|\alpha|>1$ si parla di "compressione"; se $|\alpha|<1$ di "espansione"

$x(t) = \text{rect}(t)$

$y = \mathcal{S}_2[x] \qquad z = \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}[x]$

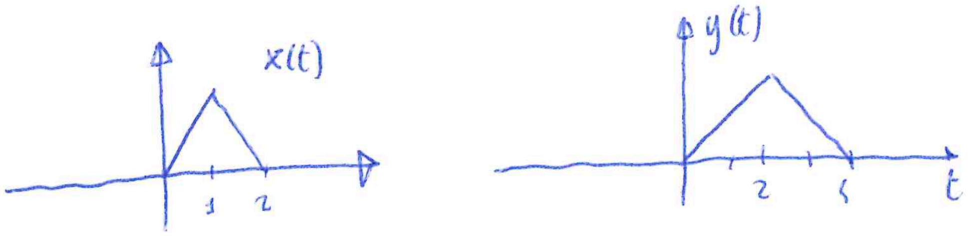
Tracciamo x, y, z. Si ha: $y(t) = \text{rect}(2t) \qquad z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$



Esempio 2 $\quad x(t) = \Lambda(t-1)$, $y = S_{\frac{1}{2}}[x]$

In formule, bisogna sostituire t con $t/2$: $\quad y(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}-1\right)$

Il supporto è $\left|\frac{t}{2}-1\right| < 1 \iff -1 < \frac{t}{2} - 1 < 1 \iff 0 < \frac{t}{2} < 2 \iff 0 < t < 4$



2.1 Caso particolare: $\alpha = -1$ Ribaltamento, indicato con R

$$y = R[x] \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = x(-t)$$

3) Trasformazione affine del Tempo

È la composizione (cascata) di ritardo e cambio scala

DEFINIZIONE

Dato il segnale $x(t)$ e dati $\alpha \in \mathbb{R}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$,

si definisce $y = A_{\alpha,\beta}[x]$ il segnale

$$y : t \in \mathbb{R} \to x(\alpha t - \beta)$$

Si può vedere y in due modi

1) Un ritardo $\mathcal{U}_\beta$ seguito da un cambio scala S_α

2) Un cambio scala S_α seguito da un ritardo $\mathcal{U}_{\beta/\alpha}$

NOTA La cascata o serie di due sistemi opera matematicamente come la composizione dei due operatori: $T = T_2 \circ T_1 \iff \to \boxed{T_1} \to \boxed{T_2} \to$

DIM 1 Posto $w = \mathcal{U}_\beta[x]$ e $z = \mathcal{S}_\alpha[w]$, si ha:

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = x(t-\beta) \; ; \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; z(t) = w(\alpha t) = x(\alpha t - \beta) = y(t)$ CVD

DIM 2 Posto ora $w = \mathcal{S}_\alpha[x]$ e $z = \mathcal{U}_{\beta/\alpha}[w]$, si ha

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = x(\alpha t) \; ; \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; z(t) = w(t - \frac{\beta}{\alpha}) = x(\alpha t - \beta) = y(t)$ C.V.D.

In modo sintetico possiamo dire $A_{\alpha,\beta} = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}_{\frac{\beta}{\alpha}} \circ \mathcal{S}_\alpha$

Quindi è importante applicare ritardo e cambio scala nell'ordine giusto.

Tuttavia nella pratica può risultare più intuitivo applicare prima un cambio scala $\mathcal{S}_{1/T}$ e poi un ritardo $\mathcal{U}_{t_0}$

Questo perché il cambio scala $\mathcal{S}_{1/T}$ si interpreta come una "normalizzazione" dell'asse del tempo rispetto a T e perché è più facile applicare il ritardo "assoluto" t_0

In formule si scrive $\quad y(t) = x\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$

Quindi in genere conviene trasformare la forma $x(\alpha t - \beta)$ nella forma $x\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ e poi applicare prima la normalizzazione degli assi e poi il ritardo

$\Rightarrow$ Vedere le dispense interattive

Esercizi (si può usare la dispensa interattiva per verifica)

1) Tracciare $y(t) = rect(t/5 + 1) = rect(0.2t + 1)$

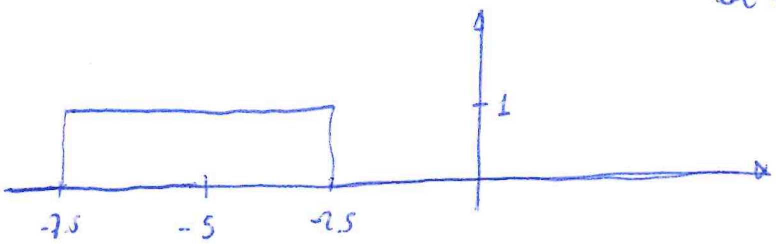
$\alpha = 0.2$
$\beta = -1$

È una trasformazione affine del tempo.

Conviene metterla in forma $x\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$:

$y(t) = rect\left(\frac{t+5}{5}\right)$

l'impulso è centrato in $t_0 = -5$
ed il supporto è esteso di $T = 5$



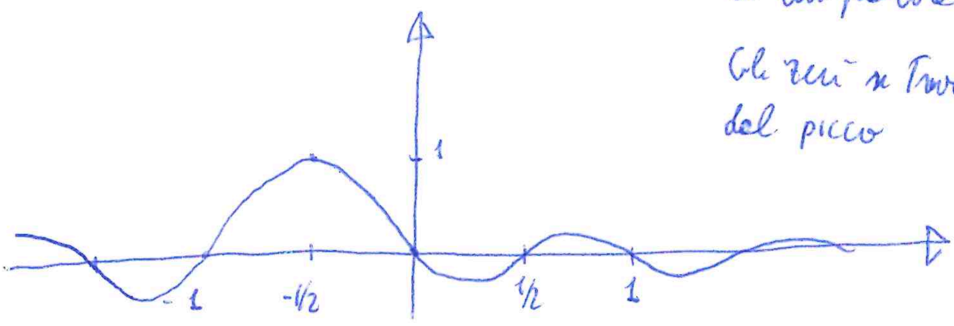
2) Tracciare $y(t) = sinc(-2t - 1)$

Per la parità del sinc, $y(t) = sinc(2t+1)$

Abbiamo $y(t) = sinc\left(\frac{t + 1/2}{1/2}\right)$

sinc centrato in $t_0 = -1/2$
e asse delle ascisse "compresso" di un fattore 1/2

Gli zeri si trovano a distanza $k \cdot \frac{1}{2}$ dal picco



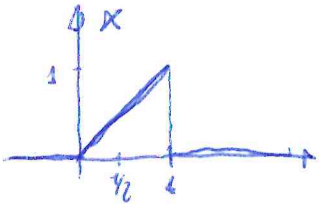
3) Sia $x(t) = t \cdot \mathrm{rect}(t - 1/2)$

Tracciare i segnali seguenti:

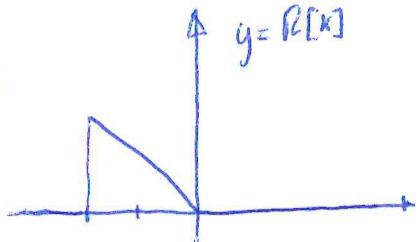
① x ② $R(x)$ ③ $-x$ ④ $\mathcal{U}_{-2}[x]$ ⑤ $\mathcal{S}_{-2}[x]$

⑥ $-R[\mathcal{U}_2[x]]$ ⑦ $\mathcal{A}_{-1/2;1/2}[x]$

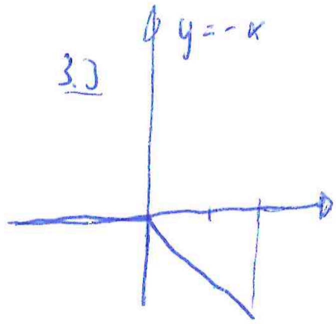
3.1



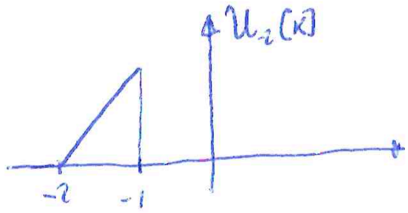
3.2



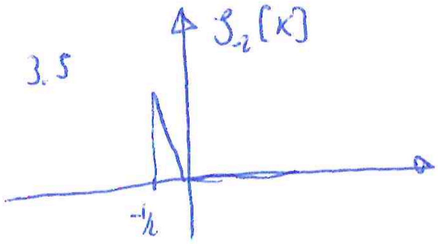
3.3



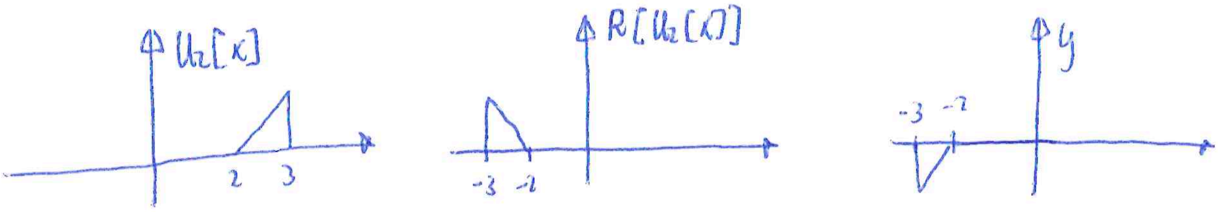
3.4



3.5

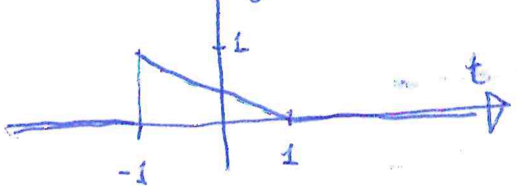


3.6 $y = -R[\mathcal{U}_2[x]] \iff y(t) = -x(-t-2) = -x\left(\frac{t+2}{-1}\right)$



3.7 $y = \mathcal{A}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}[x] \iff y(t) = x\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{t-1}{-2}\right)$

$T = -2, \quad t_0 = 1$ Ribaltamento, espansione per 2, ritardo di 1



WOOCLAP:

RJOLNA 1-2

Altri sistemi notevoli a t.c.

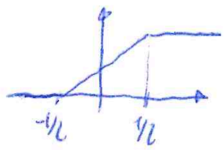
- Derivatore: $y(t) = x'(t)$

Esempio: se $x(t) = t \cdot u(t)$, $y(t) = u(t)$

se $x(t) = u(t)$, $y(t) = \delta(t)$

- Integratore: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Esempio se $x(t) = rect(t)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} rect(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1/2 \\ \int_{-1/2}^{t} dt = t + 1/2 & \text{se } |t| < 1/2 \\ 1 & \text{se } t > 1/2 \end{cases} = \left(t + \frac{1}{2}\right) rect(t) + u(t - 1/2)$$

Sistemi notevoli a t.d.

1) Ritardo: $y = \mathcal{U}_N[x]$ con $N \in \mathbb{Z}$, $\Leftrightarrow \forall n, \ y(n) = x(n-N)$

2) Decimazione: $\forall N \in \mathbb{N}_0$, $y = (\downarrow N)[x] \Leftrightarrow \forall n \ \ y(n) = x(n \cdot N)$

Equivale a prendere un "campione" ogni N

3) Espansione (o volte detta interpolazione)

$\forall N \in \mathbb{N}_0$ $y = (\uparrow N)[x] \Leftrightarrow \forall n, \ y(n) = \begin{cases} x(n/N) & \text{se } \frac{n}{N} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Equivale ad inframezzare due campioni consecutivi di x con $N-1$ zeri

4) Accumulatore: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

5) Differenza prima: $y(n) = x(n) - x(n-1)$

Proprietà dei sistemi

1) Sistema statico o istantaneo

Un sistema è detto statico o istantaneo se l'uscita ad un istante t (o n) non dipende da valori dell'ingresso oltre che $x(t)$ (o $x(n)$ e t.d.)

Esempi di sistema statico

$$y(t) = \log[\,|\cos(x(t))| + 1\,]$$

$$y(t) = x(t)\cdot t^2 + 1$$

$$y(t) = (x(t) - 1)^2$$

$$y(n) = n\,x(n)$$

$$y(n) = \frac{\sqrt{1 - x^2(n)}}{x^2(n) + 1} - x(n)$$

2) Sistema dinamico o con memoria

È un sistema non statico. Ci deve essere qualche forma di "memoria" perché $y(t)$ dipende da almeno un valore passato (o futuro) dell'ingresso

Esempi

$$y(t) = x(t-1)$$

$$y(t) = x^2(t+1)$$

$$y(t) = x'(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$y(n) = n\,x(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n+1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

3) Causalità

Un sistema causale è un sistema in cui l'uscita ad ogni istante t (o n) non dipende da valori futuri dell'ingresso

Un sistema anticausale è un sistema la cui uscita ad ogni istante t (o n) dipende solo da valori futuri dell'ingresso

Un sistema non causale non è né causale né anticausale

Esempi

$y(t) = x(t)$ causale, in particolare, istantaneo

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ causale

$y(t) = m_{(t-\frac{T}{2},\, t+\frac{T}{2})}[x]$ non causale

$y(t) = x(t+1) + t^2$ anticausale

$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$ causale

$y(n) = x(2n)$ non causale: se $n>0$ $y(n)$ dipende dal futuro
se $n<0$ $y(n)$ dipende dal passato

4) Stabilità "BIBO"

Un sistema è BIBO-stabile (o, per brevità, stabile) se, qualunque sia l'ingresso x limitato, l'uscita corrispondente è anch'essa limitata

Esempi:

$y(t) = x^2(t) + x(t) + 1$ stabile

$y(t) = x'(t)$ non stabile: esempio $x(t) = \sin t^2$, $y(t) = 2t \cos t^2$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ non stabile: se $x(t) = u(t)$, $y(t) = t \cdot u(t)$

$y(n) = \sum_{m=-3}^{3} x(n-m)$ stabile (somma finita)

$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(n-m)$ non stabile, esempio $x(n) = 1$

5) Linearità

Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ degli spazi vettoriali di segnali

$T: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è lineare Δ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$

$$T[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2] = \alpha_1 T[x_1] + \alpha_2 T[x_2]$$

(sovrapposizione degli effetti e proporzionalità)

Esempi

$y(t) = t^2 x(t)$ lineare

$y(t) = x(t) + t$ non lineare

$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)d\tau$ lineare

$x(n) = \max\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$ non lineare

6) Tempo invarianza

Un sistema Tempo invariante "non invecchia": Tratta un segnale sempre "allo stesso modo".

Se quindi $y = T[x]$, applicando una versione ritardata di x all'ingresso, osserveremo all'uscita una versione ritardata di y

<u>Definizione</u> Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ degli insiemi di segnali. Essi sono detti <u>chiusi</u> rispetto al ritardo $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ ..., $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{U}_\beta[x] \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{U}_\beta[y] \in \mathcal{Y}$

Analoga definizione vale a t.d.

Esempi: $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, con $p \in \{1, 2, \infty\}$ è chiuso rispetto al ritardo

lo stesso per ℓ^p, $p \in \{1, 2, \infty\}$

<u>Definizione</u> <u>Sistema Tempo-invariante</u>

Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono chiusi rispetto al ritardo, il sistema $T: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è Tempo invariante se e solo se, qualunque sia $x \in \mathcal{X}$:

(t.c.) $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\quad T[\mathcal{U}_\beta[x]] = \mathcal{U}_\beta[T[x]]$

(t.d.) $\forall N \in \mathbb{Z}$ $\quad T[\mathcal{U}_N[x]] = \mathcal{U}_N[T[x]]$

Cioè un sistema T.I. commuta con un ritardo

Esempi

Nella pratica, si ha spesso a disposizione l'espressione di $y(t)$ in funzione del segnale x.
Per verificare la Tempo-invarianza, si calcola l'uscita corrispondente a $x(t-\beta)$ e si controlla se coincide con $y(t-\beta)$

Ancora più semplicemente, per avere Tempo-invarianza, variabile Temporale t (o n) appare, nell'espressione di y, solo come argomento di x e senza cambio-scala allora il sistema è T.I.

① $y(t) = \log(\cos(x(t)+2))$

$$T[\mathcal{U}_\beta[x]](t) = \log(\cos(x(t-\beta)+2)) = y(t-\beta)$$: Tempo invariante

② $y(t) = m_{(t-\frac{1}{2},\, t+\frac{1}{2})}[x] = \int_{t-1/2}^{t+1/2} x(\tau)\,d\tau$ ("media mobile")

$$T[\mathcal{U}_\beta[x]](t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} x(\tau-\beta)\,d\tau$$ posto $s = \tau-\beta$, $ds = d\tau$, si ha

$$= \int_{t-\frac{1}{2}-\beta}^{t+\frac{1}{2}-\beta} x(s)\,ds = y(t-\beta)$$: Tempo invariante

③ $y(n) = \max[x(n-1), x(n), x(n+1)]$

$$T[\mathcal{U}_N[x]](n) = \max[x(n-1-N), x(n-N), x(n+1-N)] = y(n-N)$$: Tempo invariante

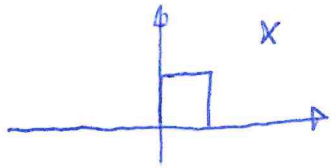
④ $y(n) = n \cdot x(n)$

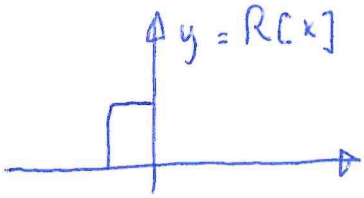
$$T[\mathcal{U}_N[x]](n) = n\, x(n-N) \neq y(n-N) = (n-N)\, x(n-N)$$

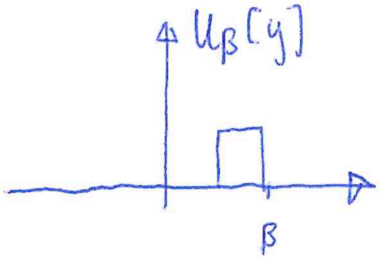
(5) $y(t) = x(-t) \qquad y = R[x]$

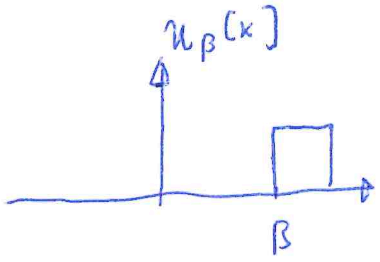
$$T[U_\beta[x]](t) = R[x(t-\beta)] = x(-t-\beta)$$

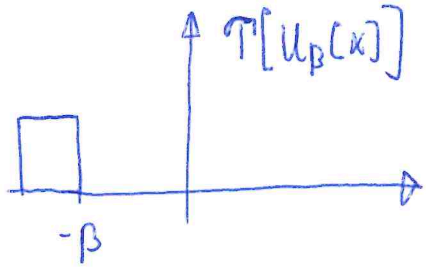
$$y(t-\beta) = x(-(t-\beta)) = x(-t+\beta) \qquad \text{non T.I}$$











(6) $y(t) = x(2t)$

$$T[U_\beta[x]](t) = T[x(t-\beta)] = x(2t-\beta) \qquad \text{NON T.I.}$$

$$U_\beta[T[x]](t) = U_\beta[y](t) = y(t-\beta) = x(2t-2\beta)$$

(7) $y = A_{\alpha,\beta}[x] \qquad y(t) = x(\alpha t-\beta)$

$$A_{\alpha,\beta}[U_\gamma[x]](t) = A_{\alpha,\beta}[x(t-\gamma)] = x(\alpha t-\beta-\gamma)$$

$$U_\gamma A_{\alpha,\beta}[x](t) = U_\gamma[x(\alpha t-\beta)] = x(\alpha t-\alpha\gamma-\beta)$$

I due segnali sono uguali se e solo se $\alpha t-\beta-\gamma = \alpha t-\alpha\gamma-\beta$

cioè $\alpha\gamma = \gamma$. Siccome ciò deve essere vero $\forall\gamma$, si ha $\alpha = 1$

e quindi $A_{\alpha,\beta} = U_\beta$. In altre parole, le uniche trasformazioni affini del tempo che sono anche tempo-invarianti sono i <u>ritardi puri</u>

Corollario Se il sistema S è tempo invariante e l'ingresso è periodico di periodo T, lo è anche l'uscita

DIM. x periodico $\Leftrightarrow$ $x = U_T[x]$

S t.i $\Leftrightarrow$ $\forall \beta \quad S[U_\beta[x]] = U_\beta[S[x]]$

Ma allora se $\beta = T$ e $y = S[x]$ si ha

$$y = S[x] = S[U_T[x]] = U_T[S[x]] = U_T[y] \quad \text{CVD}$$

Esercizio I sistemi seguenti sono definiti dalla relazione ingresso uscita. Determinarne le proprietà

	Istantaneo	Dinamico	Caus.	Anti caus.	Non caus.	BIBO	LIN	T.I.
$y(t) = \cos x^2(t)$	✓		✓			✓		✓
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$		✓	✓				✓	✓
$y(n) = x(n+1) - 2x(n) + x(n-1)$		✓			✓	✓	✓	✓
$y(t) = x(1-t)$		✓			✓	✓	✓	
$y(n) = x(3n)$		✓			✓	✓	✓	
$y(t) = t\,x(t^2) + 1$		✓			✓			