Delta di Dirac o impulso

Abbiamo bisogno di un ultimo tipo di segnale, la delta di Dirac, detta anche impulso.

Tale segnale è utile come modello matematico per dei fenomeni per i quali le funzioni usuali non sono sufficienti.

La delta di Dirac è invece una "funzione generalizzata", cioè uno strumento matematico più potente delle funzioni usuali, che permette di gestire in modo rigoroso dei problemi in cui le funzioni usuali non bastano, ad esempio

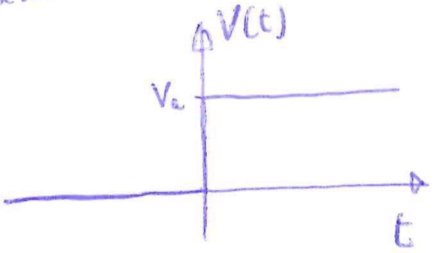
1) Calcolare la "derivata" di un segnale discontinuo

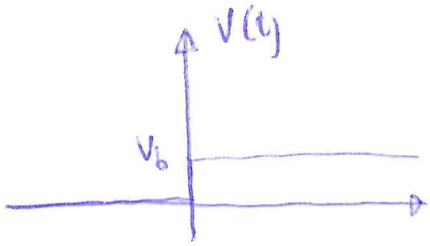
2) Rappresentare un segnale tramite il suo valor medio

Esempio dalla dinamica

Consideriamo il modello matematico di un pallone da calcio che viene colpito al momento di un calcio di rigore. Per semplicità, ignoriamo la forza d'attrito e supponiamo che il pallone si muova sul piano

L'andamento temporale della velocità è modellato come un gradino





$V(t) = V_a \cdot u(t)$

$V(t) = V_b\, u(t)$

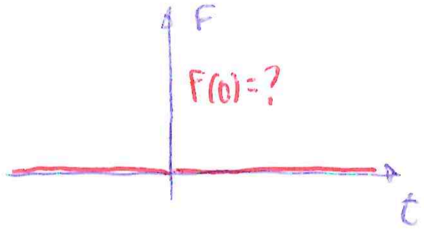
Ci domandiamo che forza è stata impressa al pallone per ottenere una tale velocità.

Sappiamo che $F = ma = m\dfrac{dV}{dt}$

Siccome la velocità è costante $\forall t<0$ e $\forall t>0$, la forza applicata è nulla in tali intervalli:

$F(t) = 0 \quad \forall t<0$

$F(t) = 0 \quad \forall t>0$



La forza applicata è "impulsiva": cioè ha una durata che tende a zero, ma è comunque capace di indurre un cambiamento istantaneo e non nullo della velocità.

Ma quanto vale $F(0)$?

Osserviamo che $v(T) - V(-T) = \displaystyle\int_{-T}^{T} \frac{F(t)}{m}\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \frac{F(0)}{m}\,dt$

perché $F(t)$ è nulla a dx e sx di 0.

Ma tale integrale è l'area di un rettangolo con base che tende a zero. L'area però non può essere zero, perchè altrimenti $V(T) = V(-T) = 0$ e il pallone non si muove.

In un certo senso deve essere "$F(0) = \infty$" per avere un cambio istantaneo di velocità.

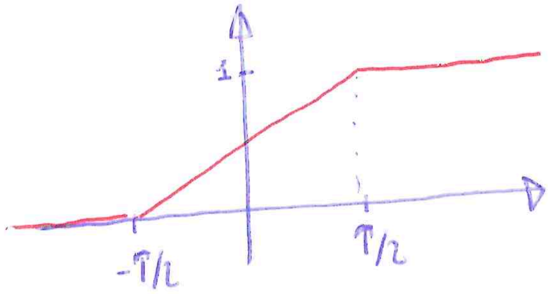
Ma anche questo non basta: come si fa a individuare la velocità imposta, cioè l'area dell'impulso di forza?

Ci serve quindi un nuovo strumento matematico, la delta di Dirac.

Lo introdurremo prima come limite di una famiglia di funzioni e poi formalmente tramite la proprietà del campionamento che ci dice come usare rigorosamente tale strumento matematico nei calcoli.

Torniamo all'esempio del calcio di rigore. Invece di supporre che la velocità passi da 0 a v_0 istantaneamente, supponiamo che lo faccia linearmente nell'intervallo di tempo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

Consideriamo allora il modello matematico di $V(t)/V_0$ (normalizziamo per evitare di portare avanti un parametro in più)

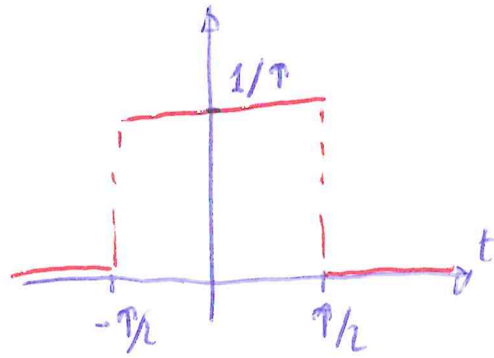


Abbiamo $x_T(t) = \frac{V(t)}{V_0} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -T/2 \\ \frac{t+T/2}{T} & \text{se } |t| < T/2 \\ 1 & \text{se } t > T/2 \end{cases}$

La derivata è $\frac{d}{dt} x_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -T/2 \\ 1/T & \text{se } |t| < T/2 \\ 0 & \text{se } t > T/2 \end{cases}$

$V(t) = V_0 x_T(t)$
$V'(t) = V_0 r_T(t)$

Chiamiamo $r_T(t)$ tale funzione e osserviamo che $r_T(t) = \frac{1}{T} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



Qualunque sia $T > 0$, l'area di r_T è sempre 1

Ciò corrisponde al fatto che qualunque sia T, il cambiamento di velocità tra $-T/2$ e $T/2$ è sempre $\Delta V = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dV}{dt} dt = V_0 \cdot \int_{-T/2}^{T/2} r_T(t) dt$

osserviamo anche che $\boxed{\Delta V = V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t) dt}$ useremo questa forma

Da questo punto di vista vorremmo definire l'impulso come il limite, per $T \to 0$, della famiglia di funzioni r_T: $\delta(t) = \lim_{T \to 0} r_T(t)$

Questo permetterebbe di definire correttamente l'ampiezza del salto:

$$\Delta V = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \delta(t) dt$$

Basta moltiplicare $\delta(t)$ per V_0 per cambiarne l'area e quindi definire l'ampiezza del salto

Rimane il problema che, per quanto detto,

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \quad e \quad \delta(t) = +\infty \quad \text{per } t = 0$$

Gli strumenti tradizionali della matematica non permettono di calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt$

come si fa allora?

un po' come è stato fatto per risolvere l'equazione $x^2 = -1$: siccome non esiste nessuna funzione che sia sufficiente, definiamo una funzione generalizzata, tramite la

proprietà del campionamento

Definizione della delta di Dirac (o impulso) tramite la proprietà del campionamento

Sia $x(t)$ un segnale continuo intorno a zero e definito in $\mathbb{R}$

La delta di Dirac $\delta(t)$ è tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)$$ DEFINIZIONE

Tale definizione permette di dare un senso al limite di $r_T(t)$ per T che tende a zero.

Infatti, poniamo $L_T[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t) x(t) dt$

Si ha:

$$L_T[x] = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} x(t) dt = m_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[x]$$

Per il Teorema del valor medio, $\exists\, t^* \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

tale che $x(t^*) = m_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[x]$

Adesso ha senso considerare il limite per $T \to 0$:

per tale limite t^* deve per forza convergere a 0

Abbiamo allora:

$$\lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t) x(t)\, dt = x(0)$$

confrontando con la proprietà del campionamento,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0) \qquad (1)$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t)\, x(t)\, dt = x(0) \qquad (2)$$

danno senso alla notazione $\boxed{\delta(t) = \lim_{T\to\infty} r_T(t)}$

In effetti, qualunque sia la famiglia di segnali $s_T(t)$ tale che $\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(t)\, x(t)\, dt = x(0)$,

$\delta(t)$ si può vedere come $\lim_{T\to\infty} s_T(t)$

Per esempio, $s_T(t) = \dfrac{e^{-t^2/T}}{\sqrt{T\pi}}$, $s_T = \dfrac{1}{T\pi^2} \mathrm{sinc}\left(\dfrac{1}{T}\dfrac{t}{\pi}\right)$

Ammetteremo d'ora in poi che la scrittura $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt$ si possa manipolare con le regole usuali dell'integrazione.

Questo è vero, ma non lo dimostreremo

supponendo di poter invertire, senza dim.

1) Area della δ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to 0} r_T(t)\,dt = \lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t)\,dt =$$

$$\lim_{T\to 0} 1 = 1$$ L'area dell'impulso è 1

2) Moltiplicazione per uno scalare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\,\delta(t)\,x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot[A\,x(t)]\,dt = A\,x(0)$$

Quindi l'area di $A\delta(t)$ è A

3) Ritardo. Sia $\beta \in \mathbb{R}$, che significa $\delta(t-\beta)$?

Se x è continua, scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\beta)\,x(t)\,dt =$$ cambio di variabile $s = t-\beta$, $t = s+\beta$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,x(s+\beta)\,ds = x(s+\beta)\big|_{s=0} = x(\beta)$$

4) Ribaltamento: $\delta(-t) = \delta(t)$

Ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\,dt$, se $f(t) = \delta(-t)x(t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)\,x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,x(-t)\,dt = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,x(t)\,dt$$

In questo senso $\delta(-t) = \delta(t)$

Si può anche osservare che, $\forall T$, $r_T(-t) = r_T(t)$ e per continuità assumere che anche δ è pari

5) Area dell'impulso su insiemi diversi da $\mathbb{R}$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \delta(t-\beta)\,dt$, con $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$

Usando il trucco della funzione indicatrice,

$$\int_{\mathcal{X}} \delta(t-\beta)\,dt = \int_{\mathbb{R}} I_{\mathcal{X}}(t)\,\delta(t-\beta)\,dt \overset{(*)}{=} I_{\mathcal{X}}(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{se } \beta \notin \mathcal{X} \end{cases}$$

Cioè l'area di $\delta(t-\beta)$ su $\mathcal{X}$ è 1 se e solo se $\beta \in \mathcal{X}$

NOTA.

Per effettuare il passaggio $(*)$ avremmo bisogno di sapere che $I_{\mathcal{X}}$ è continua intorno a β. Anche se la funzione indicatrice è sempre discontinua nella frontiera di $\mathcal{X}$, si può mostrare che

$\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \delta(t-\beta)\,dt = I_{\mathcal{X}}(\beta)$ anche su tale frontiera

L'idea è che se $\beta \in \mathcal{X}$, l'impulso è "tutto nell'integrale", anche se intorno destro / sinistro di β non lo è.

Quindi per la funzione indicatrice vale l'eguaglianza notevole

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad I_{\mathcal{X}}(t) = \int_{\mathbb{R}} I_{\mathcal{X}}(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

In realtà tale identità vale anche per tutti i segnali continui o con un insieme discreto di discontinuità: è la <u>rappresentazione integrale dei segnali</u>

6) Rappresentazione integrale

Utilizzando le proprietà del ritardo e del ribaltamento, scriviamo:

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad x(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\beta)x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\beta-t)x(t)dt$$

Cambiamo ora il nome delle variabili. Usiamo τ come variabile d'integrazione e t come ritardo (cioè al posto di β). Si ha:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}: \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau}$$

Questa è la cosiddetta rappresentazione integrale di un segnale t.c. Essa vale anche per segnali continui quasi ovunque (senza DIM.)

Interpretazione

L'integranda è $x(\tau)\delta(t-\tau)$, cioè un impulso centrato in τ e di ampiezza $x(\tau)$. Possiamo anche dire di ampiezza $x(t)$ perché per $\tau \neq t$ il δ è nullo.

Quindi il segnale x è visto come la somma integrale d'infiniti impulsi, centrati in ognuno dei t e di ampiezza $x(t)$

Caso di segnali con discontinuità di salto: gradino

Osserviamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = u(t)$

che è la funzione indicatrice di $\mathbb{R}^+$

7) Cambio scala $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

Calcoliamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)x(t)dt$$

con il cambio di variabile $s = at$, $t = \frac{s}{a}$, $dt = \frac{ds}{|a|}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\,x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,x\left(\frac{s}{a}\right)\frac{ds}{|a|} = \frac{1}{|a|}x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|}\delta(t)x(t)dt$$

8) Prodotto segnale impulso: $f(t)\cdot\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$

Sia $f(t)$ continua in 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot f(t)x(t)\,dt = f(0)\,x(0) =$$

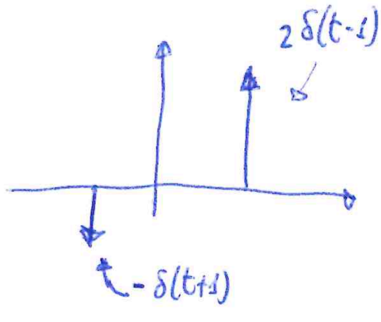
$$f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\,\delta(t)\,x(t)\,dt$$

9) Derivata dell'impulso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)\,x(t)dt = \left[\delta(t)\,x(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,x'(t)\,dt = -x'(0)$$

quindi la derivata dell'impulso restituisce $-x'(0)$ quando si calcola l'integrale del prodotto con x

10) "Grafico" dell'impulso Il grafico di $A\delta(t-t_0)$ si rappresenta convenzionalmente come una freccia in t_0 di altezza proporzionale ad A e verso dato dal segno di A



DERIVATA GENERALIZZATA

Usando la delta di Dirac è possibile calcolare la derivata di segnali con discontinuità di salto

Cominciamo dal gradino. Ricordiamo che

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$$

posto $\begin{cases} s = t-\tau \\ \tau = t-s \end{cases}$, l'integrale diventa

$$u(t) = \int_t^{-\infty} \delta(s)\,(-ds) = \int_{-\infty}^{t} \delta(s)\,ds$$

Ma, $u(-\infty)=0 \Rightarrow u(t)-u(-\infty) = \int_{-\infty}^{t} \delta(s)\,ds$

Quindi $\boxed{\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)}$

Un segnale derivabile su $\mathbb{R}$ tranne che in un insieme discreto di punti in cui ha discontinuità di salto è detto

<u>derivabile a tratti</u> (D.A.T.)

Per esempio $u(t)$, $\mathrm{rect}(t)$ sono derivabili a tratti

Per calcolare la derivata generalizzata di $x(t)$ D.A.T.:

- dove x è derivabile, coincide con la derivata usuale
- nei punti di salto, è un impulso di Dirac con ampiezza pari al salto (segno incluso)

Esempio

Calcolare la derivata generalizzata di $rect(t)$.

Il segnale $x(t) = rect(t)$ è costante su tutto $\mathbb{R}$, tranne in $\pm 1/2$, dove c'è un salto. Allora

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq \pm 1/2 \\ +\delta(t+1/2) & \text{per } t = -1/2 \\ -\delta(t-1/2) & \text{per } t = +1/2 \end{cases}$$

: infatti in $-1/2$ c'è un salto di ampiezza 1 "verso l'alto"

in $+1/2$ c'è un salto di ampiezza -1 "verso il basso"

Quindi $x'(t) = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2)$

Verifichiamo che $\quad x(t) - x(-\infty) = \int_{-\infty}^{t} x'(\tau)d\tau$

siccome $x(-\infty) = 0$, si ha

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau+1/2) - \delta(\tau-1/2)]d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+1/2)d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-1/2)d\tau$$

Ricordiamo come si calcola $\int_{\mathcal{X}} \delta(\tau-\beta)d\tau$: tale integrale vale 1 se e solo se $\beta \in \mathcal{X}$.

In questo caso, $\mathcal{X} = [-\infty, t)$ e $\beta = \pm 1/2$

L'integrale vale 1 se e solo se $\beta < t \iff t > \pm 1/2$

cioè l'integrale vale $u(t \pm 1/2)$.

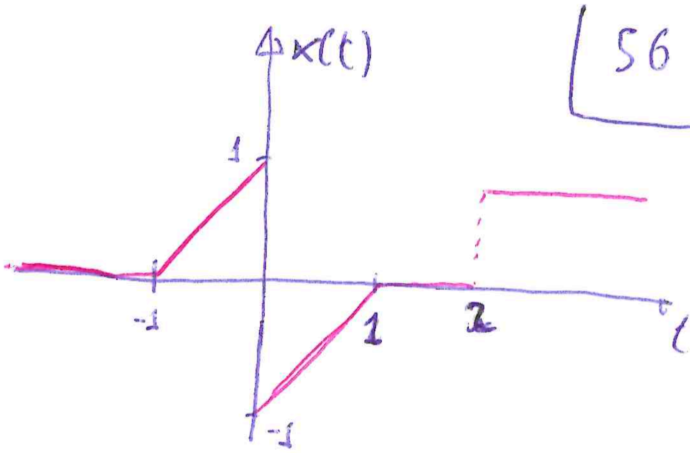
$$x(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2) = \begin{cases} 0 & t < -1/2 \\ 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 1-1=0 & t > 1/2 \end{cases} = rect(t)$$

C.V.D.

Ricordiamo: $\boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-\beta)d\tau = u(t-\beta)}$

Esempio

Calcolare la derivata del segnale in figura



Per $t < -1$, $x' = 0$

per $-1 < t < 0$ $\quad x' = 1$

per $0 < t < 1$ $\quad x' = 1$

per $1 < t < 2$ $\quad x' = 0$

per $t > 2$ $\quad x' = 0$

Salti:

salto di -2 in ϕ : $\quad -2\delta(t)$

salto di 1 in 2 : $\quad \delta(t-2)$

quindi $\quad x'(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta(t-2)$

(infatti osserviamo che $\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ è esattamente la derivata della parte "senza salti")

Esempio

Calcolare $\frac{d^2}{dt^2}\Lambda(t)$

Abbiamo $\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \text{rect}(t+1/2) - \text{rect}(t-1/2)$

crescita lineare tra -1 e 0

decrescita lineare tra 0 e 1

$$\frac{d^2}{dt^2}\Lambda(t) = \frac{d}{dt}\text{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right) - \frac{d}{dt}\text{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \text{rect}'(t+1/2) - \text{rect}'\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \delta(t+1) - \delta(t) - (\delta(t) - \delta(t-1)) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

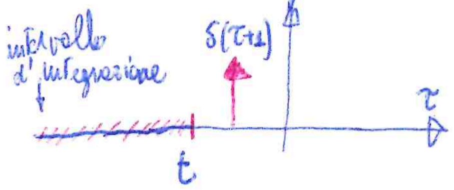
Questo ci permette di rispondere alla domanda iniziale: se la velocità ha andamento $V(t) = V_0 u(t)$, la forza deve essere $F(t) = m\frac{dV}{dt}(t) = mV_0\,\delta(t)$

Esercizi

① Calcolare $x(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(t+1) + u(t) - \delta(t-1)]\, dt$

Svolgimento. Conviene calcolare separatamente i tre integrali:

a) $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+1)\, d\tau$



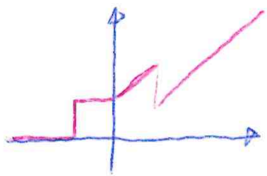
Se $t < -1$, l'intervallo d'integrazione **non** contiene l'impulso e l'integrale quindi vale zero

Se $t > -1$ l'intervallo d'integrazione contiene l'impulso e quindi l'integrale vale 1.

In sintesi, $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+1)\, d\tau = u(t+1)$

b) $\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \int_0^t d\tau & \text{se } t>0 \end{cases} = t \cdot u(t)$

c) $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-1)\, d\tau = u(t-1)$ come per il caso a)



Quindi $x(t) = u(t+1) - u(t-1) + t\, u(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + t\, u(t)$

② Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} \delta(t-\tau)\, d\tau$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2+1} \delta(t-\tau)\, d\tau$

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} \delta(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{t^2+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{t^2+1}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2+1} \delta(t-\tau)\, d\tau = \left.\frac{1}{\tau^2+1}\right|_{\tau=t} = \frac{1}{t^2+1}$

③ Calcolare $t^2 \delta(t)$ e $\cos(t-\frac{\pi}{4})\, \delta(t+\frac{\pi}{4})$

a) $t^2 \delta(t) = \left. t^2 \right|_{t=0} \cdot \delta(t) = 0$ (proprietà ③ per $f(t) = t^2$)

b) $\cos(t-\frac{\pi}{4})\, \delta(t+\frac{\pi}{4}) = \left. \cos(t-\frac{\pi}{4}) \right|_{t=-\frac{\pi}{4}} \cdot \delta(t+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2})\, \delta(t+\frac{\pi}{4}) = 0$

Delta discreto

Il segnale delta a T.d. (delta di Kronecker)

è molto semplice: $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$

ma condivide molte delle proprietà della delta a T.c.

1) Campionamento:

Qualunque sia il segnale t.d. x, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)\, x(n) = x(0)$

Infatti, nella somma, solo il termine per $n=0$ contribuisce, tutti gli altri sono annullati perchè $\delta(n)=0 \ \forall n \neq 0$

2) Area: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1$

3) Rappresentazione come somma: $\forall x, \ \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, \delta(n-m)$$

4) Delta e gradino

consideriamo l'operatore "differenza prima", analogo t.d. della derivata: $d_x(n) \triangleq x(n) - x(n-1)$

Si ha $u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$ infatti nella somma ci sono solo zeri se $n<0$

e $d_u(n) = \delta(n)$