Altri spazi di segnali importanti

Per i segnali a tempo discreto s'introducono due altri spazi, l^1 e l^∞

l^1 : spazio dei segnali assolutamente sommabili

$$x \in l^1 \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < +\infty$$

Si può provare che l^1 è uno spazio vettoriale, cioè è chiuso rispetto alla combinazione lineare

Il suo elemento nullo è la successione bilatera identicamente nulla : $\forall n \in \mathbb{Z},\ x(n) = 0$

Si definisce la norma di l^1 :

$$\forall x \in l^1, \qquad \|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < +\infty$$

Mentre non si definisce un prodotto scalare in l^1

l^∞ : spazio dei segnali a valore limitato:

$$x \in l^\infty \iff \exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{Z} \ |x(n)| < M$$

Anche l^∞ è uno spazio vettoriale (senza dim) con vettore nullo coincidente con la successione $x(n) = 0 \ \forall n$

La norma l^∞ è $\|x\|_\infty = \sup_n \{x(n)\}$

l^∞ è uno spazio metrico, ma senza prodotto scalare

Similmente, per i segnali t.c., si definiscono gli spazi seguenti, tutti metrici:

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\, dt < +\infty \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\, dt < +\infty$$

$$\mathcal{L}^1(t_1,t_2) = \left\{ x : (t_1,t_2) \to \mathbb{C} : \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\, dt < +\infty \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^1(t_1,t_2), \quad \|x\|_1 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\, dt < +\infty$$

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \exists M \in \mathbb{R}^+ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ |x(t)| < M \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}), \quad \|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ |x(t)| \right\} < +\infty$$

$$\mathcal{L}^\infty(t_1,t_2) = \left\{ x : (t_1,t_2) \to \mathbb{C} : \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall t \in (t_1,t_2), \ |x(t)| < M \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^\infty(t_1,t_2), \ \|x\|_\infty = \sup_{t \in (t_1,t_2)} \left\{ |x(t)| \right\} < +\infty$$

OPZIONALE

È possibile provare che tutti gli spazi $\mathcal{L}^p$ e l^p con $p \in \{1,2,\infty\}$ sono <u>completi</u>: questo vuol dire che tutte le successioni di Cauchy convergono ad un elemento dello spazio stesso.

Ricordiamo che una successione x_n è detta di Cauchy se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n, m > N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dove $d(\cdot,\cdot)$ è la distanza indotta da $\|\cdot\|$ cioè i termini della successione, presi a coppie, sono sempre più vicini tra loro

Relazioni d'inclusione degli spazi di funzioni (SENZA DIM.)

1) $\ell^\infty \supset \ell^2 \supset \ell^1$ Tutti i segnali t.d. assolutamente sommabili sono ad energia finita; Tutti i segnali ad energia finita sono limitati

2) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ un segnale assolutamente integrabile e limitato, è ad energia finita

3) Dato $A \in \mathbb{R}^+$, sia $S(A)$ l'insieme delle funzioni nulle al di fuori di $(-A, A)$. Cioè funzioni a supporto in $(-A, A)$.

$\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap S(A) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Simmetrie dei segnali

Consideriamo un segnale x, che può essere t.c. o t.d.
Per fissare le idee chiameremo t la variabile indipendente ma quanto segue vale sia per segnali t.c., sia per segnali t.d.

x è reale $\Leftrightarrow$ $\forall t$ $x(t) = \overline{x(t)}$

x è imm. puro $\Leftrightarrow$ $\forall t$ $x(t) = -\overline{x(t)}$

x è pari $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x(t) = x(-t)$

x è dispari $\Leftrightarrow$ $\forall t$ $x(t) = -x(-t)$

x è hermitiano $\Leftrightarrow$ $\forall t$ $x(t) = \overline{x(-t)}$

x è antihermitiano $\Leftrightarrow$ $\forall t$ $x(t) = -\overline{x(-t)}$

Segnali periodici a Tempo continuo

Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un segnale t.c.

x è detto **segnale periodico** se e solo se

$\exists\, T \in \mathbb{R}_0^+$ (reale strettamente positivo) Tale che

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad x(t+T) = x(t)$

Allora T è detto periodo di x; x è detto T-periodico

È facile mostrare che se T è periodo di x, anche kT lo è, $\forall k \in \mathbb{N}_0$

Infatti $\quad x(t+kT) = x(\underbrace{t+(k-1)T + T}) = x(t+(k-1)T)$

e quindi, reiterando il ragionamento $x(t+kT) = x(t+(k-1)T) = x(t+(k-2)T) =$

$= \dots = x(t+2T) = x(t+T) = x(t)$

Il più piccolo reale strettamente positivo T_0 Tale che $\forall t \in \mathbb{R}$

$x(t+T_0) = x(t)$ è detto periodo fondamentale di x segnale periodico

Esempi $\quad x(t) = \sin(\omega t)$ è periodico infatti

$\forall k \in \mathbb{N}_0$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \sin\left(\omega\left(t + k\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = \sin(\omega t + 2k\pi) = \sin(\omega t)$

Quindi ogni $T_k = k\frac{2\pi}{\omega}$, $k \geq 1$ è un periodo di x, ma

il periodo fondamentale è $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Nel seguito, quasi sempre ci riferiremo al periodo fondamentale

di un segnale periodico

Lemma Integrale su intervallo traslato (IIT) $\quad \int_a^b x(t)\,dt = \int_{a+kT}^{b+kT} x(t)\,dt$

Se x è T-periodico, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

DIM Applichiamo il cambio di variabile $\tau = t - kT$ e ricordiamo $x(\tau - kT) = x(\tau)$

$$\int_{a+kT}^{b+kT} x(t)\,dt = \int_a^b x(\tau - kT)\,d\tau = \int_a^b x(\tau)\,d\tau \qquad \text{CVD}$$

Parametri momentivi dei segnali periodici

È spesso interessante valutare i parametri momentivi di un segnale periodico di periodo T nell'intervallo $(0,T)$

Il valor medio in un periodo è $m_T[x] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$

L'energia in un periodo è $E_T[x] = \int_0^T |x(t)|^2 dt$

La potenza in un periodo è $P_T[x] = E_T[x]/T$

Lemma nell'energia di un segnale periodico

L'energia di un segnale periodico su $\mathbb{R}$ è infinita o nulla

DIM. Sia T il periodo di x

Si ha che $E[x]$ (energia su $\mathbb{R}$ di x) si può calcolare partizionando $\mathbb{R}$ negli intervalli $((k-1)T, kT)$ che sono periodi di x. Allora

$$E[x] = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{(k-1)T}^{kT} |x(t)|^2 dt$$

Possiamo applicare il lemma dell'int. su intervallo traslato oppure rifare il calcolo

Posto $\tau = t-(k-1)T$ si ha $t = \tau + (k-1)T$

$$E[x] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T |x(\tau + (k-1)T)|^2 d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T |x(\tau)|^2 d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_T[x]$$

Quindi se $E_T[x]=0$, allora $E[x]=0$

Altrimenti $E[x] = +\infty$

Nota Per la periodicità di x,

$x(\tau + (k-1)T) = x(\tau)$

qualunque siano $\tau\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{Z}$

Lemma sulla potenza di un segnale periodico

La potenza di un segnale periodico su $\mathbb{R}$ è la stessa che si calcola su di un periodo, ammesso che quest'ultima sia finita

DIM Sia x periodico di periodo T

La potenza su $\mathbb{R}$ è $P[x] = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$

Poniamo ora $k = \lfloor \frac{\tau}{T} \rfloor \in \mathbb{N}$ (parte intera della divisione)

Allora esiste $\tau_0 \in [0, T[$ tale che $\tau = kT + \tau_0$

Si ha:

$$\int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt = \int_{-\tau_0 - kT}^{-kT} |x(t)|^2 dt + \sum_{n=-k}^{k-1} \int_{nT}^{(n+1)T} |x(t)|^2 dt + \int_{kT}^{kT+\tau_0} |x(t)|^2 dt$$

Qualunque sia n, $\int_{nT}^{(n+1)T} |x(t)|^2 dt = \int_0^T |x(t)|^2 dt = E_T[x]$ per il lemma IIT

Sempre per periodicità;
$$\int_{-\tau_0 - kT}^{-kT} |x(t)|^2 dt = \int_{-\tau_0}^{0} |x(t)|^2 dt \qquad \text{lemma IIT}$$

e
$$\int_{kT}^{kT+\tau_0} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\tau_0} |x(t)|^2 dt \qquad \text{lemma IIT}$$

Allora $P[x] = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} |x(t)|^2 dt + \frac{1}{2\tau} \cdot 2k E_T[x]$

ora $\int_{-\tau_0}^{\tau_0} |x(t)|^2 dt \le 2 E_T[x] = 2T P_T[x] < +\infty$ per ipotesi

quindi $\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} |x(t)|^2 dt = 0$

Invece $\quad k = \tau/T - \tau_0/T$

Quindi $\quad \dfrac{k}{\tau} = \dfrac{1}{T} - \dfrac{\tau_0}{\tau T}$

Allora $\quad P[x] = \lim\limits_{\tau \to +\infty} \dfrac{k}{\tau} E_T[x] = \lim\limits_{\tau \to +\infty} \dfrac{E_T[x]}{T} - \dfrac{\tau_0}{\tau} \dfrac{E_T[x]}{T}$

$$= P_T[x] - \boxed{\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\tau_0}{\tau} P_T[x]}$$

Tale limite è ϕ perché $P_T[x]$ non dipende da τ ed è finito per hp mentre τ_0 dipende da T, ma è limitato in $(0, T)$

Quindi per $\tau \to +\infty$, $\tau_0/\tau \to 0$

Infine $\quad P[x] = P_T[x] = \dfrac{E_T[x]}{T}$

Segnali sinusoidali in forma canonica

Per il caso t.c., un segnale sinusoidale in forma canonica ha l'espressione:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{con} \quad A \in \mathbb{R}^+,\ \omega_0 \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in (-\pi, \pi)$$

equivalente a:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \qquad \text{con} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \iff \omega_0 = 2\pi f_0$$

quindi anche $f_0 \in \mathbb{R}^+$

Il periodo è $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Notiamo che per $\omega_0 \to 0$, $T \to \infty$ e $x(t) \to A$

segnale costante, che può essere visto come periodico di periodo qualsiasi (non periodo infinito)

Calcoliamo energia e potenza della sinusoide in forma canonica in un periodo

$$E_T[x] = \int_0^T A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt = A^2 \int_0^T \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right] dt$$

$$= \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{2}\left[\frac{\sin(2\omega_0 t + \varphi)}{2\omega_0}\right]_0^T = \frac{A^2 T}{2}$$

perché anche $\sin(2\omega_0 t + \varphi)$ è periodico di periodo T, quindi assume lo stesso valore in zero e T

Allora $P_T[x] = \frac{A^2}{2}$ e $P[x] = A^2/2$

Esponenziale immaginario in forma canonica

È il segnale

$$x(t) = A e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}^+,\ \omega_0 \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in (-\pi, \pi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + jA\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + jA\cos(\omega_0 t + \varphi - \tfrac{\pi}{2})$$

Quindi la parte reale e la parte immaginaria hanno uno sfasamento (ritardo di fase) di $\pi/2$. Si dice anche

che parte reale e immaginaria dell'esp. imm. puro sono in quadratura (o in quadratura di fase)

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Infatti $x(t+T) = Ae^{j(\omega_0 t + \omega_0 T + \varphi)} = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \underbrace{e^{j\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}}}_{=1} = x(t)$

Energia: $E_T[x] = \int_0^T |Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}|^2 \, dt = \int_0^T A^2 \, dt = A^2 T$

Potenza $P[x] = P_T[x] = E_T[x]/T = A^2$

Segnali periodici a Tempo discreto

Il segnale t.d. x è periodico se e solo se esiste $N \in \mathbb{N}_0$ tale che, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x(n+N) = x(n)$

Il minimo N che soddisfa tale condizione è detto periodo fondamentale

Il valor medio su di un periodo è $m_N[x] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$

L'energia su di un periodo è $E_N[x] = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

La potenza su di un periodo è $P_N[x] = E_N[x]/N$

Lemma sull'energia L'energia di un segnale periodico T.d. non nullo è infinita

Infatti $E[x] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_N[x] = +\infty$

Potenza di un segnale periodico t.d. di periodo N

$$P[x] = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} E_{(-M,M)}[x]$$

Sia $k = M \bmod N \iff \exists\, m \in \mathbb{Z} \quad M = mN+k$, con $k \in \{0,1,\dots N-1\}$

Allora $$E_{(-M,M)}[x] = \sum_{n=-(mN+k)}^{-(mN+1)} |x(n)|^2 + \sum_{l=-m}^{m-1} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n+lN)|^2 + \sum_{n=mN}^{mN+k} |x(n)|^2$$

$$= \sum_{n=-k}^{-1} |x(n)|^2 + \sum_{l=-m}^{m-1} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 + \sum_{n=0}^{k} |x(n)|^2$$

$$= \sum_{n=-k}^{k} |x(n)|^2 + 2m \cdot E_N[x]$$

$$P[x] = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-k}^{k} |x(n)|^2 + \frac{2m}{2M+1} E_N[x]$$

Ora $\sum_{n=-k}^{k} |x(n)|^2 \leq 2E_N[x]$, qualunque sia M. Quindi il limite per $M \to +\infty$ di $\sum_{n=-k}^{k} |x(n)|^2 / (2M+1)$ è zero

Infine, ricordando che $M = mN+k$, se $M\to\infty$, anche $m\to\infty$ e

$$P[x] = \lim_{M\to+\infty} \frac{2E_N[x]\, m}{2mN+2k} = \frac{E_N[x]}{N} = P_N[x]$$

Anche nel caso t.d., la potenza di un segnale periodico può essere calcolata su di un solo periodo

Sinusoide T.d. in forma canonica

È il segnale

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi) = A\cos(2\pi\nu_0 n + \varphi)$$

con $A \in \mathbb{R}^+$, $\omega_0 \in (0, \pi)$, $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \in (0, \frac{1}{2})$ e $\varphi \in (-\pi, \pi)$

Osserviamo che la sinusoide canonica t.d. ha pulsazione in $(0, \pi)$ mentre nel caso t.c. la pulsazione può essere un qualsiasi reale positivo.

Questo perché valgono i seguenti lemmi:

1) $\boxed{\forall \omega_1 \in \mathbb{R}, \quad \exists \omega_0 \in (-\pi, \pi) : \forall n \quad \cos(\omega_1 n + \varphi) = \cos(\omega_0 n + \varphi)}$

Quindi "è inutile" prendere pulsazioni al di fuori di $(-\pi, \pi)$, perché lo stesso segnale si può rappresentare con una pulsazione tra $-\pi$ e π.

DIM. $\forall \omega_1 \in \mathbb{R}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ e $\omega_0 \in (-\pi, \pi)$ tale che $\omega_1 = 2k\pi + \omega_0$

Infatti basta prendere $k = \left\lfloor \frac{\omega_1}{2\pi} \right\rfloor$

Allora $\cos(\omega_1 n + \varphi) = \cos(2k\pi \cdot n + \omega_0 n + \varphi) = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ C.V.D.

2) Se $\omega_0 \in (-\pi, 0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos(|\omega_0| n - \varphi)$

Infatti $\cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos(-|\omega_0| n + \varphi) = \cos(|\omega_0| n - \varphi)$ perché coseno è pari

In conclusione, è sempre possibile passare da $\cos(\omega_1 n + \varphi_1)$ in cui $\omega_1 \in \mathbb{R}$, alla forma canonica in cui $\omega_0 \in [0, \pi]$ [e in cui $\varphi \in (-\pi, \pi)$]

In termini di frequenza numerica ν, è sempre possibile esprimere una sinusoide t.d. tramite una sinusoide in forma canonica con freq. num. in $[0, \frac{1}{2}]$

Tutto ciò è abbastanza semplice con degli esempi

Esercizi: mettere in forma canonica e trovare ω_0 e ν_0.

$$x_1(n) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_2(n) = -4\cos\left[20.5\,\pi\, n + \frac{14}{3}\pi\right]$$

$$x_3(n) = 2\cos\left[-1001.7\,\pi\, n\right]$$

(1) Siccome $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, $x_1(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right)$

forma canonica $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ $\nu_0 = \frac{\pi}{4}\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{8}$

(2) Bisogna esprimere $20.5\cdot\pi$ come $2k\pi + \omega_0$; similmente per φ

Si ha: $20.5\pi = 20\pi + \frac{\pi}{2}$ e allora

$$x_2(n) = -4\cos\left(20\pi n + \frac{\pi}{2}n + 4\pi + \frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$= -4\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{2}{3}\pi\right)$$

Infine, ricordiamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

quindi $x_2(n) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{2}{3}\pi - \pi\right)$ (scegliamo $-\pi$ per ottenere una fase in $(-\pi, \pi)$)

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$\omega_0 = \pi/2$ $\nu_0 = 1/4$

(3) Esprimiamo la pulsazione come $2k\pi + \omega_0$:

$$\omega_1 = -1001.7\,\pi = -1002\,\pi + 0.3\,\pi = -1002\pi + \frac{3}{10}\pi$$

quindi $x_3(n) = 2\cos\left[-1002\pi n + \frac{3}{10}\pi n\right] = 2\cos\left[\frac{3}{10}\pi n\right]$

$\omega_0 = \frac{3}{10}\pi$ $\nu_0 = \frac{3}{20}$

Metodo per ricondurre una sinusoide T.d. alla forma canonica, con esempi

	$x_1(n) = -\cos(-307.1\pi n + 57.3\pi)$	$x_2(n) = (-16.3\pi n + 12.7\pi)$
(1) Se $A<0$ applicare $-\cos(\alpha) = \cos(\alpha+\pi)$	$x_1(n) = \cos(-307.1\pi n + 58.3\pi)$	/
(2) Cercare il multiplo pari di π più vicino a ω e scrivere $\omega_0 = 2k\pi + \omega_1$ poi applicare: $\cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos[(2k\pi + \omega_1)n + \varphi] = \cos(\omega_1 n + \varphi)$	$\omega_0 = -307.1\pi = -308\pi + 0.9\pi$ $\omega_1 = 0.9\pi$ $x_1(n) = \cos(0.9\pi n + 58.3\pi)$	$\omega_0 = -16.3\pi = -16\pi - 0.9\pi$ $\omega_1 = -0.9\pi$ $x_2(t) = \cos(-0.9\pi n + 12.7\pi)$
(3) Se $\omega_1 < 0$, applicare $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	/	$x_2(n) = \cos(0.9\pi n - 12.7\pi)$
(4) Applicare (2) a φ invece che: $\varphi = 2k\pi + \varphi_1$ $\cos(\omega n + \varphi) = \cos(\omega n + \varphi_1)$	$\varphi = 58.3\pi = 58\pi + 0.3\pi$ $x_1(n) = \cos(0.9\pi n + 0.3\pi)$	$\varphi = -12.7\pi = -12\pi - 0.7\pi$ $x_2(n) = (0.9\pi n - 0.7\pi)$
Forma canonica	$\omega = 0.9\pi$ $\nu = 0.9\pi/2\pi = 0.45$ $\varphi = 0.3\pi$	$\omega = 0.9\pi$ $\nu = 0.45$ $\varphi = -0.7\pi$

Periodicità delle sinusoide t.d.

Sia $x(n) = A\cos(2\pi\nu_0 n + \varphi)$ una sinusoide in forma canonica

1) $x(n)$ è periodico?
2) se sì con quale periodo?

(1) $x(n)$ è periodico se e solo se $\exists N \in \mathbb{N}_0$ tale che $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{cioè}$$

$$A\cos\left(2\pi\nu_0 n + \varphi\right) = A\cos\left(2\pi\nu_0(N+n) + \varphi\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \quad 2\pi\nu_0 n + 2k\pi = 2\pi\nu_0(N+n) + \varphi$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z}: 2k\pi = 2\pi\nu_0 N \quad \Leftrightarrow \boxed{\exists k \in \mathbb{Z}: \ \nu_0 = \frac{k}{N}}$

Quindi x è periodico se e soltanto se ν_0 è un numero razionale

(2) Se ν_0 è razionale, lo si riduce ai minimi termini: $\nu_0 = \frac{k}{N}$
Allora N è il periodo fondamentale e tutti i valori $m \cdot N$ sono periodi
(con m intero strettamente positivo)

Esercizio Calcolare il periodo fondamentale di $x(n) = -\cos(105.3\pi n + \frac{\pi}{10})$

Per prima cosa, scriviamo x in forma canonica:

$$x(n) = \cos\left(105.3\pi n - \frac{9}{10}\pi\right) = \cos\left(106\pi n - 0.7\pi n - \frac{9}{10}\pi\right) = \cos\left(-0.7\pi n - \frac{9}{10}\pi n\right)$$

$$= \cos\left(0.7\pi n + \frac{9}{10}\pi\right)$$

$\nu = 0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ Il periodo fondamentale è $N = 20$

Utilizzare le dispense interattive per altri esempi

wooclap HDOJPR 14-15

Esponenziale immaginario in forma canonica t. d.

Siano $A \in \mathbb{R}^+$, $\omega_0 \in (-\pi, \pi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$

Il segnale esponenziale immaginario in forma canonica a t. d. è:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x(n) = A e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = A e^{j(2\pi \nu_0 n + \varphi)}$$

$$= A \cos(\omega_0 n + \varphi) + j A \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

Osserviamo anche che $\forall n, \quad x(n) = A e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 n} = z_0 e^{j\omega_0 n}$

Il termine z_0 è una costante. Il segnale $e^{j\omega_0 n}$ è la parte interessante.

Mostriamo che è "inutile" considerare pulsazioni al di fuori di $[-\pi, \pi[$, o, equivalentemente, frequenze al di fuori di $[-1/2, 1/2[$

Infatti, sia $\omega_1 \in \mathbb{R}$. Siano $k \in \mathbb{Z}$ e $\omega_0 \in [-\pi, \pi[$ tali che $\omega_1 = 2k\pi + \omega_0$: è sempre possibile trovare tali k e ω_0.

Allora $e^{j\omega_1 n} = e^{j(2k\pi n + \omega_0 n)} = e^{j2k\pi n} \cdot e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$

Notiamo la differenza con il caso delle sinusoidi t. d., in cui le frequenze negative non si distinguono da quelle positive. Nel caso di esp. imm. invece il segno della frequenza ci dice se la parte reale è in anticipo o in ritardo di fase rispetto alla parte immaginaria.

$$e^{j\omega_0 n} = \begin{cases} \cos|\omega_0|n + j \sin|\omega_0|n = \cos|\omega_0|n + j\cos\left(|\omega_0|n - \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } \omega_0 \\ \cos|\omega_0|n - j \sin|\omega_0|n = \cos|\omega_0|n + j\cos\left(|\omega_0|n + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } \omega_0 < \end{cases}$$

Notiamo che, se $\omega_1 = -\omega_0$, $e^{j\omega_1 n} = e^{-j\omega_0 n} = \overline{e^{j\omega_0 n}}$

Cambiare il segno di ω equivale a coniugare il segnale

Periodicità di $e^{j\omega n}$

È facile verificare che $e^{j\omega_0 n} = e^{j 2\pi \nu_0 n}$

è periodico se e soltanto se ν_0 è razionale,

cioè se e soltanto se $\exists\, K, N \in \mathbb{Z}$ e tale che $\nu_0 = K/N$

Infatti $x(n) = e^{j\omega n}$ è periodico se e solo se $\exists\, N \in \mathbb{Z}$ tale che

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)}$ $\iff$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\omega_0 n + 2K\pi = \omega_0 n + \omega_0 N$

$$\iff N = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot K \iff \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{K}{N} \iff \nu_0 = \frac{K}{N}$$

Come per le sinusoidi, il periodo fondamentale è il denominatore di ν_0 ridotto ai minimi termini

Esercizi

Trovare forma canonica ed eventualmente periodo di:

$x_1(n) = -\sqrt{3}\, \exp\left[\, j\,(2\pi \cdot 3.89 n - \pi/4)\right]$

$x_2(n) = e^{j\, 0.48 \cdot 2\pi n}$ $\qquad$ $x_3(n) = e^{j\, 0.49 \cdot 2\pi n}$

Si procede in modo simile al caso delle sinusoidi

(1) Per x_1 abbiamo:

numero pari più vicino a ν

$$\nu = 3.89 = 4 - 0.11$$

$$e^{j\, 3.89 \cdot 2\pi n} = e^{j\, 8\pi n} \cdot e^{-j\, 0.11 \cdot 2\pi n} = e^{-j \frac{11}{100} \cdot 2\pi \nu}$$

(Abbiamo ignorato il fattore $-\sqrt{3}\, e^{-j\pi/4}$ che non influenza la frequenza né il periodo)

Quindi $\nu_0 = -\frac{11}{100}$ e $N = 100$

(2) $0.48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ $\qquad N = 25$

(3) $0.49 = \frac{49}{100}$ $\qquad N = 100$

Anche se la freq. di x_3 è maggiore di quella di x_2, il suo periodo è più grande

Replica periodica

La replica periodica è un operatore che ci permette di costruire un segnale periodico a partire da un segnale generico, sotto ipotesi di convergenza.

Definizione 1 Replica periodica a t.c.

Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $T \in \mathbb{R}_0^+$

Si definisce replica periodica di periodo T del segnale x un nuovo segnale dato dalla serie:

$$rep_T[x](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$ se quest'ultima converge (vero per segnali $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$)

Definizione 2 Replica periodica a t.d.

Sia $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ e $N \in \mathbb{N}_0$

Si definisce replica periodica di periodo N del segnale x un nuovo segnale dato dalla serie

$$rep_N[x](n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kN)$$ se converge (vero per segnali ℓ^1)

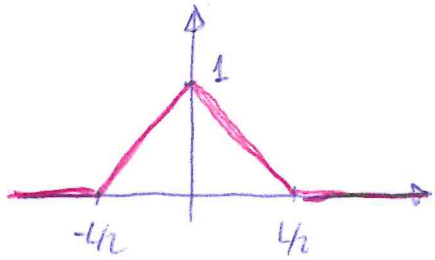
Esempio

Sia $x(t) = \Lambda\left(\frac{2t}{L}\right)$

Disegnare il segnale e la sua replica periodica per i casi: 1) $T > L$ 2) $T = L$ 3) $T = \frac{3}{4}L$ 4) $T = \frac{1}{2}L$

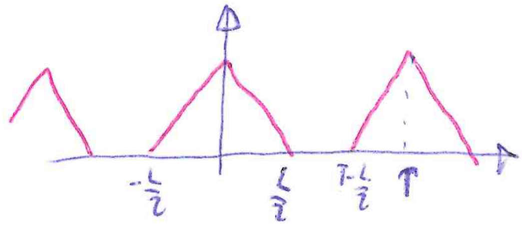
Risolveremo l'esercizio "graficamente"

L'impulso Triangolare ha supporto quando l'argomento di Δ è compreso tra -1 e 1, quindi in questo caso, quando $-1 < \frac{2t}{L} < 1 \iff -\frac{L}{2} < t < \frac{L}{2}$

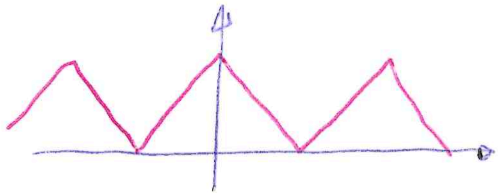


(1) Per $T > L$, osserviamo che la "prima" (cioè $k=1$) replica, $x(t-T)$ ha supporto $(T - L/2, T + L/2)$

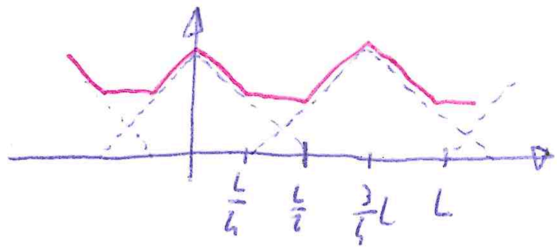
Osserviamo che invece il supporto della "replica centrale" ($k=0$) ha supporto $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$. Se $\frac{L}{2} < T - \frac{L}{2}$, le due repliche non si sovrappongono. Ciò equivale proprio alla condizione $T > L$



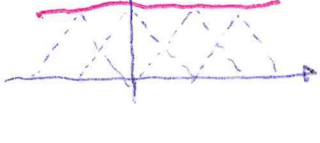
(2) In questo caso le repliche si "toccano" in $t = \frac{L}{2}(2k+1)$



(3) In questo caso le repliche si sovrappongono in $\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right)$



(4) In quest'ultimo caso le repliche sono tutte sovrapposte, ognuna con la precedente e la successiva



Funzione di segnali periodici

1) Se x_1 e x_2 sono segnali t.c periodici di periodo T_1 e T_2,

posto $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$ y è periodico se $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$

DIM. $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists\, n, m : \frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} \Leftrightarrow m T_1 = n T_2$

Sia $T = m T_1 = n T_2$

Allora $y(t+T) = f(x_1(t+T), x_2(t+T)) =$

$$= f(x_1(t+mT_1), x_2(t+nT_2)) = f(x_1(t), x_2(t)) = y(t)$$

Quindi y è periodico di periodo T

2) Se x_1 e x_2 sono periodici ma t.d. i loro periodi hanno sempre un rapporto razionale: posto $\frac{N_1}{N_2} = \frac{n}{m}$,

possiamo provare che ogni $y(n) = f(x_1(n), x_2(n))$ è periodico, e che $mN_1 = nN_2$ è un periodo

Il periodo fondamentale è il minimo comune multiplo di N_1 e N_2

3) Se $f(x,y) = x+y$, la condizione $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ oltre ad essere sufficiente per la periodicità è anche necessaria