Definizione di pto di ACCUMULAZIONE

$D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f : D \to \mathbb{R}$ $\quad D$ dominio naturale di f.

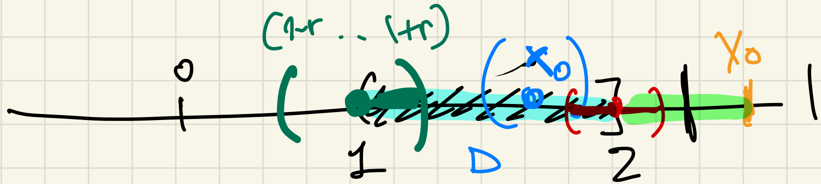
$x_0 \in \mathbb{R}$ (NON CHIEDO che $x_0 \in D$!!)

Dico che $\boxed{x_0 \text{ È di ACCUMULAZIONE per } D}$ se

$\forall r > 0$ l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ contiene almeno un pto di D (diverso da x_0, se x_0 fosse in D).

$$\left[(x_0 - r, x_0 + r) \cap D \right] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Es $D = (1, 2]$



$x_0 > 2$ NON PUÒ essere di accumulazione

$r = 2 - x_0 > 0$

$\underbrace{\left(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}\right) \cap D} = \emptyset$

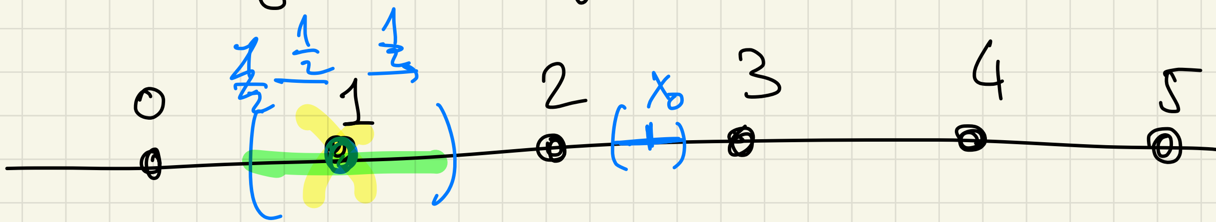
chi sono i pti di accumulazione di D?

- sicuramente tutti i punti dentro D
- $x_0 = 1$ è di accumulaz per D anche se non sta in D

$\forall\, r > 0 \quad (1-r, 1+r) \cap D = (1, 1+r)$

GLI UNICI PUNTI di ACCUMULAZIONE sono $[1, 2]$

Es $D = \{ n \in \mathbb{N} \}$



quali sono i punti di accumulazione di D?

NON CE NE SONO

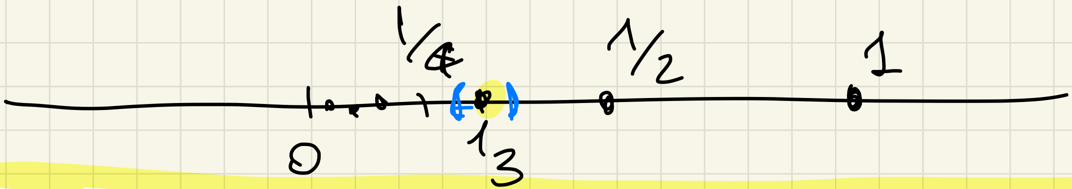
se x_0 fosse di accumulazione

$$\forall r>0 \qquad [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

$$x_0 = 1 \qquad \forall r<1 \qquad (x_0-r, x_0+r)\cap D \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

Es $D = \left\{ \frac{1}{n},\ n \neq 0\ n \in \mathbb{N} \right\}$

↓ insieme dei reciproci di tutti i numeri naturali



"x_0 è di accumulazione per D se $\forall\, r>0$ trovo pti di D a distanza minore di r da x_0"

nessuno dei pti di D è di accumulazione

0 è l'unico pto di ACCUMULAZIONE per D

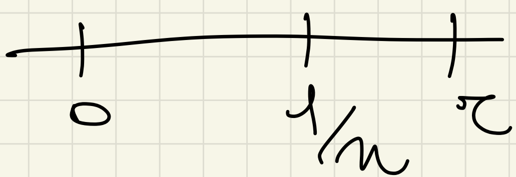
0 è di accumulazione

fisso $r > 0$ $\to$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < r$

($\frac{1}{r} > 0$

e trovo n naturale $n > \frac{1}{r}$

$\frac{1}{n}$ sta a distanza $< r$ da 0



Def $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D$ dominio di f

x_0 pto di accumulazione per D

(x_0 potrebbe essere un elemento di D oppure no)

dico che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

(limite per x che tende a x_0 è uguale al valore L).

se vale la seguente cosa:

tutte le volte che (io) fisso un intervallo centrato in L

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

cioè un insieme del tipo

$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

riesco a trovare un intervallo centrato in x_0, cioè un insieme del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$ tale che

$\forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$, $x \neq x_0$ soddisfa $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

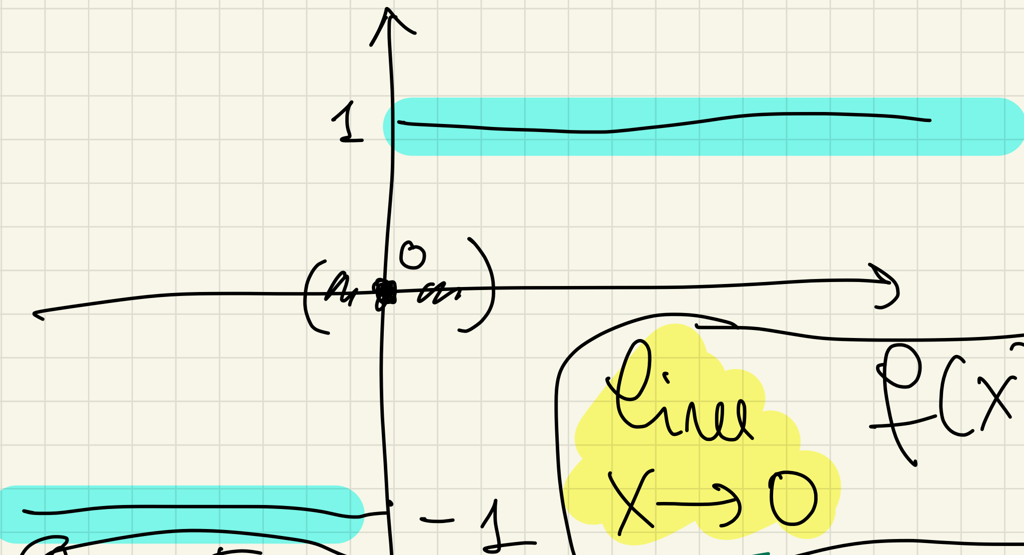
Definizione non è "operativa", non serve a calcolare niente

dice solo che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

allora posso trovare pti del dominio di f che abbiano valori f(x) "vicini" al valore L purché io li scelga "sufficientemente vicini" al pto x_0

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

es: $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



$x_0 = 0$ è di accumulazione

però $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) \text{ NON ESISTE}}$

$\boxed{\text{Se esistesse } \lim_{x \to 0} f(x) = L}$ → purché io prenda pti $x \in D$ sufficientemente vicini a $x_0 = 0$ allora $f(x) \approx L$.

Def. x_0 pto di accumulazione per D.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{+\infty}$$

se prendendo pti del dominio D "sufficient. vicini a x_0", il valore f(x) diventa molto molto grande

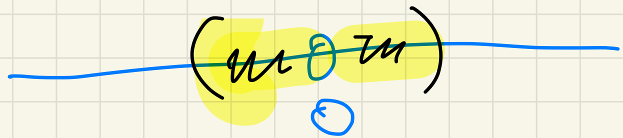
$\forall M > 0$ esiste $r > 0$ tale che

$\forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r) \quad x \neq x_0 \qquad f(x) > M$

Es $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x_0 = 0$ è di accumulazione per D



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\left(\lim_{x \to 0} f(x)\right)$

fisso $\boxed{M > 0}$ voglio trovare pti dell dominio dove $f(x) > M$ $\frac{1}{x^2} > M$

$f(x) > M$

$$\frac{1}{x^2} > \underline{100} \quad ?$$

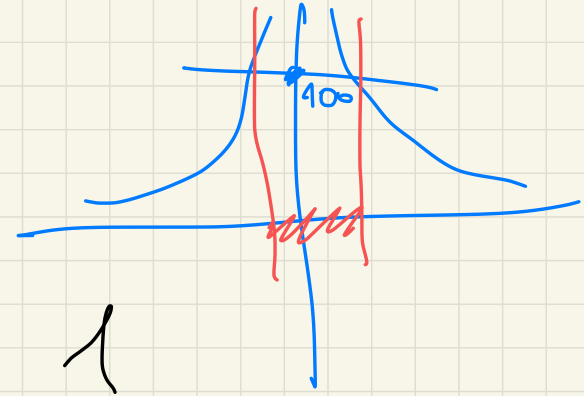
$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 < \frac{1}{100}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < +\frac{1}{\sqrt{M}}$$



Def x_0 pto di accumulazione

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

$\forall M > 0$ esiste $r > 0$ tale che

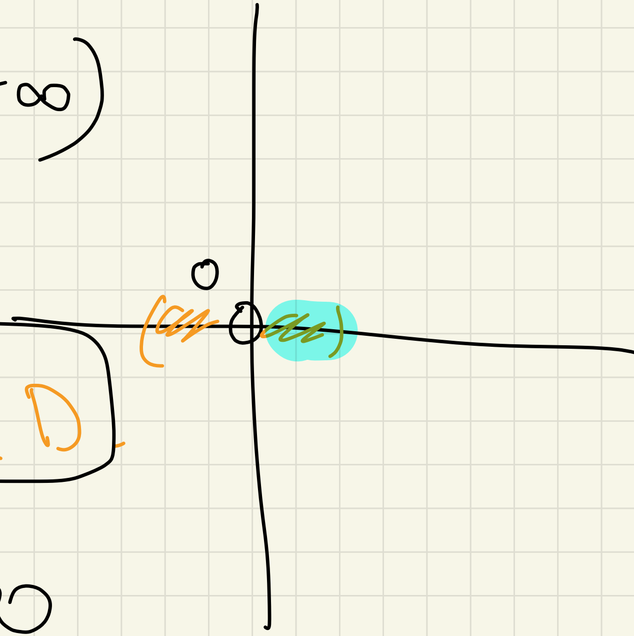
se $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ $\quad x \neq x_0$

allora $\quad f(x) < -M$

$\log x$ $\qquad D = (0, +\infty)$

$x_0 = 0$

x_0 è di accumulaz per D



$$\lim_{x \to 0^{(+)}} \log x = -\infty$$

per mostrare che $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$

devo mostrare che ogni volta che

scelgo $M > 0$, trovo che tutti i pti del dominio

di $\log x$ a distanza sufficientemente

piccola da 0, soddisfano $\boxed{\log x < -M}$

$$\log x \overset{?}{<} -M = \log(e^{-M})$$

$$\boxed{0 < x < e^{-M}} = \frac{1}{e^M}$$

x_0 di accumulazione per D

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ per che
$x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ $x \neq x_0$
$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall M > 0$ esiste $r > 0$
$x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ $x \neq x_0$
$f(x) > M$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall M > 0$ esiste $r > 0$
$x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ $x \neq x_0$
$f(x) < -M$

Def $x_0 \in D$ e x_0 di accumulazione per D
dico $\boxed{\text{che } f \text{ è CONTINUA in } x_0}$

$$\boxed{\text{se } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

f è continua in D
se f è continua in x_0, $\forall x_0 \in D$
e di accumulazione per D