Esercizi proposti 5
soluzioni

Delta di Dirac, derivate generalizzate, convoluzioni elementari

5.1

Calcolare

(a.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos t\ \delta(t-\tau)\,d\tau$ (b.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos \tau\ \delta(t-\tau)\,d\tau$

(c.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t-\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$ (d.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau$

(e.) $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$

Soluzione

(a.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos t\ \delta(t-\tau)\,d\tau = \cos t \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = \cos t$

(b.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos \tau\ \delta(t-\tau)\,d\tau = \cos t * \delta(t) = \cos t$

(c.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t-\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau)\delta(\tau)\,d\tau = 1$
facendo uso del cambio di variabile $t-\tau=\tau'$ e ricordando la ddefinizione di $\delta(t)$.

(d.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau = e^{j\omega t} * \delta(t) = e^{j\omega t}$

(e.) $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = \delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$

5.2

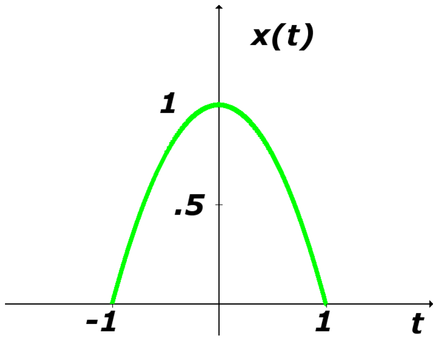
Sia $x(t) := (1-t^2)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$. Si tracci il grafico e si calcolino analiticamente i seguenti segnali

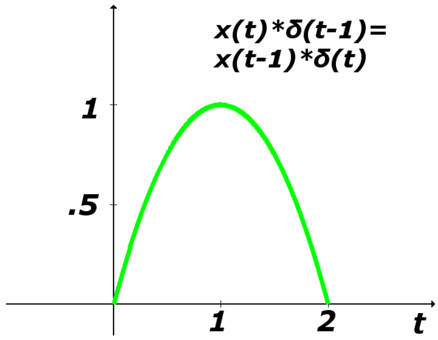
$$(i.)\ x(t)*\delta(t-1),\qquad (ii.)\ x(t-1)*\delta(t),\qquad (iii.)\ x(t-1)*\delta(t-1),$$
$$(iv.)\ x(t)\delta(t-1),\qquad (v.)\ x(t-1)\delta(t),\qquad (vi.)\ x(t-1)\delta(t-1).$$

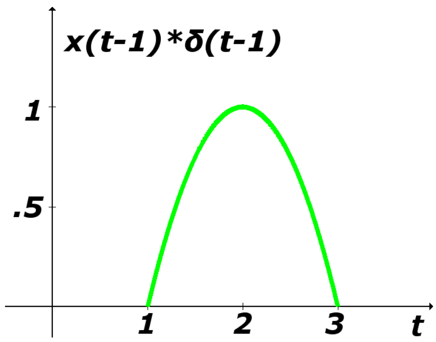
Soluzione

In figura sono riportati i grafici del segnale originale $x(t)$ e dei segnali (i.)–(iii.). Si noti che i segnali (i.) e (ii.) coincidono entrambi con la traslazione $U_{-1}\big(x(t)\big)$, mentre il segnale (iii.) coincide con $U_{-2}\big(x(t)\big)$. Per il calcolo analitico è sufficiente scrivere la definizione della convoluzione e sfruttare le proprietà della delta di Dirac. Ad esempio:

$$x(t)*\delta(t-1) = \int x(\tau)\delta(t-1-\tau)\,d\tau = \int x(t-1-\tau)\delta(\tau)\,d\tau = x(t-1).$$







In modo analogo si verificano (ii.) e (iii.).
I segnali (iv.)–(vi.) sono invece tutti impulsivi. Per determinare l'ampiezza corretta degli impulsi si deve applicare la regola $f(t+\beta)\delta(t+\gamma) = f(\beta-\gamma)\delta(t+\gamma)$. Si ottiene,

$$\begin{aligned}(iv.)\;\; & x(t)\delta(t-1) = x(1)\delta(t) = 0,\\ (v.)\;\; & x(t-1)\delta(t) = x(-1)\delta(t) = 0,\\ (vi.)\;\; & x(t-1)\delta(t-1) = x(0)\delta(t-1) = \delta(t-1).\end{aligned}$$

5.3

Dati due segnali $v(t)$ e $w(t)$ si indichi con $c(t) = v(t) * w(t)$ il segnale ottenuto per convoluzione di $v(t)$ e $w(t)$. Si esprima, in termini di $c(t)$, la convoluzione

$$v(t+\alpha) * w(t+\beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione

Per definizione di convoluzione,

$$\begin{aligned}v(t+\alpha) * w(t+\beta) &= \int v(\tau+\alpha)w(t+\beta-\tau)\,d\tau \qquad [\text{cambio variabile } \tau' = \tau+\alpha]\\ &= \int v(\tau)w(t+\alpha+\beta-\tau)\,d\tau = c(t+\alpha+\beta)\,.\end{aligned}$$

Allo stesso modo, con semplici cambi di variabile nella definizione di convoluzione si deduce la regola generale,

$$v(t+\alpha) * w(t+\beta) = v(t+\alpha+\beta) * w(t) = v(t) * w(t+\alpha+\beta) = c(t+\alpha+\beta)$$

5.4

Tracciare i grafici e i grafici delle derivate generalizzate dei segnali listati. Successivamente calcolare analiticamente le derivate generalizzate e verificate i grafici.

- $x_1(t) = A\,\mathrm{sign}(t)$ [$\mathrm{sign}(t)$ vale 1 per $t \geq 0$ e -1 per $t < 0$]
- $x_2(t) = A\,\mathrm{rect}(t)$
- $x_3(t) = \begin{cases} t-1, & 0 < t < 3, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$
- $x_4(t) = 3\cos(2t)\,u(t)$
- $x_5(t) = 3\sin(2t)\,u(t)$
- $x_6(t) = (1-t^2)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$
- $x_7(t) = (1-t^2)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$

Soluzione

Le derivate generalizzate sono

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d}{dt}A\big(u(t)-u(-t)\big) \\ &= A\left(\delta(t)-(-1)\,\delta(-t)\right) \\ &= 2A\,\delta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \frac{d}{dt}A\left(u\left(t+\frac{1}{2}\right)-u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= A\left(\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} &= \frac{d}{dt}\Big[(t-1)\big(u(t)-u(t-3)\big)\Big] \\ &= u(t)-u(t-3)+(t-1)\left(\delta(t)-\delta(t-3)\right) \\ &= u(t)-u(t-3)-\delta(t)-2\delta(t-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{dt} &= \frac{d}{dt}3\cos 2t\,u(t) \\ &= -6\sin 2t\,u(t)+3\cos t\,\delta(t) \\ &= -6\sin 2t\,u(t)+3\delta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_5}{dt} &= \frac{d}{dt}3\sin 2t\,u(t) \\ &= 6\cos 2t\,u(t)+3\sin t\,\delta(t) \\ &= 6\cos 2t\,u(t) \end{aligned}$$

5.5

Calcolare la derivata generalizzata del segnale a tempo continuo

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t)e^{(2+j)t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dove il segnale "segno" è definito da:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Soluzione

Formalmente, ricordando la regola di derivazione del prodotto e la proprietà dell'impulso δ secondo cui $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ per ogni funzione f continua in $t = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \left[\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t)\right] e^{(2+j)t} + \operatorname{sgn}(t)\frac{d}{dt}e^{(2+j)t} \\ &= 2\delta(t)e^{(2+j)t} + \operatorname{sgn}(t)(2+j)e^{(2+j)t} \\ &= 2\delta(t) + \operatorname{sgn}(t)(2+j)e^{(2+j)t} \end{aligned}$$

dato che il segnale $\operatorname{sgn}(t)$ è costante, salvo avere una discontinuità di ampiezza 2 in $t = 0$.

In particolare, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\operatorname{Re} x(t) = \operatorname{Re}\frac{d}{dt}x(t) &= 2\delta(t) + \operatorname{sgn}(t)e^{2t}(2\cos t - \sin t) \\ &= 2\delta(t) + e^{2t}\Big(2\operatorname{sgn}(t)\cos t - \sin|t|\Big) \\ \frac{d}{dt}\operatorname{Im} x(t) = \operatorname{Im}\frac{d}{dt}x(t) &= \operatorname{sgn}(t)e^{2t}(\cos t + 2\sin t) \\ &= e^{2t}\Big(\operatorname{sgn}(t)\cos t + 2\sin|t|\Big) \end{aligned}$$

5.6

(a.) Calcolare e tracciare il grafico dei segnali a tempo discreto

$$\delta(n) * \delta(n-1), \qquad \delta(n-1) * \delta(n-3), \qquad \delta(n-1) * \delta(n+1)$$

e del segnale

$$\delta(n+N_1) * \delta(n+N_2), \qquad N_1, N_2 \in \mathbb{Z}, \text{ qualunque.}$$

(b.) Verificare che

$$u(n-1) - u(n-4) = \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3).$$

(c.) Sono dati i segnali a tempo discreto

$$v(n) := u(n) - u(n-5), \qquad w(n) := n\Big(u(n+2) - u(n-2)\Big).$$

Ispirandosi a quanto visto nei punti (a.) e (b.) calcolare

$$z(n) := v(n) * w(n)$$

Soluzione

(a.) Conviene iniziare osservando che, per ogni $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$, indicando con $c(n)$ la convoluzione delle delta traslate vale

$$c(n) := \delta(n+N_1) * \delta(n+N_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k+N_1)\delta(n+N_2-k) = \delta(n+N_1+N_2)$$

infatti, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ i termini della serie $\delta(k+N_1)\delta(n+N_2-k)$ sono tutti nulli a parte quello relativo a $k = -N_1 = n+N_2$ che vale 1. Si ricava che $c(n) = 1$ per $n = -N_1 - N_2$ e $c(n) = 0$ per ogni altro n. La conclusione è che $c(n) = \delta(n+N_1+N_2)$,

$$\delta(n+N_1) * \delta(n+N_2) = \delta(n+N_1+N_2) \tag{1}$$

La prima parte dell'esercizio è ora banale

$$\delta(n) * \delta(n-1) = \delta(n-1), \qquad \delta(n-1) * \delta(n-3) = \delta(n-4), \qquad \delta(n-1) * \delta(n+1) = \delta(n)$$

(b.) Il segnale $u(n-1)$ vale 1 per ogni $n \geq 1$ ed è nullo altrove; il segnale $u(n-4)$ vale 1 per ogni $n \geq 4$ ed è nullo altrove. La differenza $u(n-1) - u(n-4)$ è quindi 1 per $n = 1, 2, 3$ e nula altrove, ovvero $u(n-1) - u(n-4) = \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$.

(c.) Imitando quanto visto in (b.) il segnale

$$v(n) := u(n) - u(n-5) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)$$

e il segnale

$$w(n) := n\Big(u(n+2) - u(n-2)\Big) = -2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1).$$

Il calcolo della convoluzione si riduce allora alla paziente applicazione dell'Equazione (1)

$$\begin{aligned}
v * w(n) &= \Big[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)\Big] \\
&\quad * \Big[-2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1)\Big] \\
&= \delta(n) * \Big[-2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1)\Big] \\
&+ \delta(n-1) * \Big[-2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1)\Big] \\
&+ \delta(n-2) * \Big[-2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1)\Big] \\
&+ \delta(n-3) * \Big[-2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1)\Big] \\
&+ \delta(n-4) * \Big[-2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1)\Big] \\
&= -2\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1) \\
&\quad -2\delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-2) \\
&\quad -2\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-3) \\
&\quad -2\delta(n-1) - \delta(n-2) + \delta(n-4) \\
&\quad -2\delta(n-2) - \delta(n-3) + \delta(n-5) \\
&= -2\delta(n+2) - 3\delta(n+1) - 3\delta(n) - 2\delta(n-1) \\
&\quad -2\delta(n-2) + \delta(n-4) + \delta(n-5)
\end{aligned}$$