Esercizi proposti 4
soluzioni

Segnali periodici

4.1

Per i seguenti segnali:

- $x_1(t) = \sin(3t) + \cos \pi t$,
- $x_2(t) = 1 + \sin 3t - 4\cos(5t - \frac{\pi}{3})$,
- $x_3(t) = \sin(\pi/4)\, \cos \pi t + \sin^2(3t)$,
- $x_4(t) = \sin(\pi/4)\, \cos 2t + \sin^2(3t)$,
- $x_5(t) = 2\pi - 3 + \sin(-\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}) - e^{j\frac{\pi}{4}t+2}$,
- $x_6(n) = \cos(2n) - e^{j4\pi n}$,
- $x_7(n) = e^{j\frac{3\pi}{2}n}\cos(\frac{5\pi}{2}n) + j\sin(\pi n)$,
- $x_8(n) = e^{j\,n}\, \sin n$,
- $x_9(n) = e^{j\,\pi n}\, \sin \pi n$.

dire se sono periodici e, in caso affermativo, calcolarne: (a.) il periodo fondamentale, (b.) il valor medio, (c.) la potenza media in un periodo.
Nota bene: per trovare il periodo fondamentale di $x_4(t)$ dovete prestare molta attenzione - qual è il periodo fondamentale di $\sin^2(t)$? Sarà molto importante saper individuare il periodo fondamentale quando dovremo calcolare le serie di Fourier.

Soluzione

• Il segnale $x_1(t)$ non è periodico.

Il segnale $x_1(t)$ è somma di due segnali, il primo $\sin 3t$ è periodico di periodo $T_1 = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{3}$, il secondo $\cos \pi t$ periodico di periodo $T_2 = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ed è $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Poiché la somma di segnali e periodica se e solo se gli addendi sono segnali periodici con i periodi in rapporto razionale, si conclude che $x_1(t)$ non è periodico.

• Il segnale $x_2(t)$ è periodico, di periodo $T = 2\pi$

Il segnale $x_2(t)$ è somma della costante 1, irrilevante ai fini della periodicità, del segnale $\sin 3t$ di periodo $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ e del segnale $-4\cos(5t - \frac{\pi}{3})$ di periodo $T_2 = \frac{2\pi}{5}$, con $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$. I rapporti tra i periodi degli addendi sono razionali, quindi $x_2(t)$ è periodico di periodo $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 3T_1 = 5T_2 = 2\pi$.

• Il segnale $x_3(t)$ non è periodico

Il rapporto tra i periodi degli addendi è irrazionale.

• Il segnale $x_4(t)$ è periodico, di periodo $T = \pi$

Il segnale $x_4(t)$ è somma di $\sin(\pi/4)\cos 2t$ di periodo $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e di $\sin^2(3t)$ che ha periodo $T_2 = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, dove il fattore $\frac{1}{2}$ si giustifica poiché la funzione base $\sin^2 t$ ha periodo π anziché 2π. Il rapporto tra periodi è $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{3}$. Il segnale $x_4(t)$ è quindi periodico di periodo $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = T_1 = 3T_2 = \pi$.

• Il segnale $x_5(t)$ è periodico, di periodo $T = 40$
Il segnale $x_5(t)$ è somma di una irrilevante costante, di $\sin(-\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3})$ di periodo $\frac{2\pi}{|\omega|} = 10$ e di $-e^{j\frac{\pi}{4}t+2}$ di periodo $\frac{2\pi}{\omega} = 8$. Il rapporto tra i periodi degli addendi è razionale quindi $x_4(t)$ è periodico di periodo $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 40$

• Il segnale $x_6(n)$ non è periodico
Il segnale $x_6(n)$ è somma di di addendi. Il primo è $\cos(2n)$, che3 non è periodico poiché non soddisfa la condizione necessaria e sufficiente per la periodicità di un segnale sinusoidale discreto, ovvero $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Il secondo addendo è $-e^{j4\pi n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Si conclude che $x_6(n)$ non è periodico.

• Iniziamo con l'osservare che $\sin(\pi n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Il segnale $x_7(n)$ si può scrivere come

$$\begin{aligned}
x_7(n) &= e^{j\frac{3\pi}{2}n} \cos\left(\tfrac{5\pi}{2}n\right) + j\sin(\pi n) \\
&= e^{j\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)n} \cos\left(\left(\tfrac{5\pi}{2} - 2\pi\right)n\right) \\
&= e^{-j\frac{\pi}{2}n} \cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) \\
&= \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) - j\sin\left(\tfrac{\pi}{2}n\right)\right] \cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) \\
&= \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) - j\sin\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) \\
&= \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) - j\tfrac{1}{2}\sin(\pi n) \\
&= \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}n\right).
\end{aligned}$$

Il segnale $x_7(n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ è nullo per n dispari ed unitario per n pari. Si conclude che $x_7(n)$ ha periodo fondamentale $N = 2$.

• Il segnale $x_8(n)$ non è periodico
Se $x_8(n)$ fosse periodico lo sarebbe anche il suo modulo $\sin n$, ma quest'ultimo non soddisfa le condizioni per la periodicità di un segnale sinusoidale discreto, ovvero $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

• Il segnale $x_9(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

4.2

(a.) $x(t)$ è periodico di periodo 4. Discutere la periodicità di $y(t) := x(-\frac{t}{2} + 1)$.

(b.) $x(t)$ è periodico di periodo T. Discutere la periodicità di $y(t) := x(\alpha t + \beta)$.

(c.) $x(n)$ è periodico di periodo N. Discutere la periodicità di $y(n) := x(2n + 5)$.

Soluzione

Il caso (b) è quello generale. Per $y(t) := x(\alpha t + \beta)$ e cerchiamo, se esiste, T' tale che $y(t) = y(t + T')$.

$$y(t + T') = x(\alpha(t + T') + \beta) = x(\alpha t + \beta + \alpha T')$$

quindi T' è un periodo di $y(t)$ se $\alpha T'$ è un periodo di $x(t)$, cioè se $\alpha T' = T$, ovvero

$$T' = \frac{T}{\alpha}$$

Per quanto riguarda il caso discreto le condizioni che garantiscono la periodicità di $y(n) = x(\alpha n + \beta)$ sono $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $T' = \frac{T}{|\alpha|} \in \mathbb{Z}$. Per il caso (a.) del testo, $y(t)$ ha periodo $T' = 8$, mentre nel caso (c.) il segnale $y(n)$ è periodico di periodo $\frac{N}{2}$ solo se N è un numero pari. AGGIUNGERE DETTAGLI SUL CASO (c.).

4.3

Un segnale a tempo discreto $\{y(n); n \in \mathbb{Z}\}$ è tale che $y(n) = 0$ per ogni n dispari. Sapendo che il segnale non è identicamente nullo e che è periodico di periodo $N_0 > 1$, si dimostri che N_0 è necessariamente pari.

Soluzione

Prova per assurdo. Si assuma che N sia un periodo e sia dispari. Per definizione di periodo $x(n) = x(n + N)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora ponendo $n = 0$ si ha $x(0) = x(N) = 0$ poiché per ipotesi $x(\cdot)$ è nullo negli istanti dispari. Ponendo poi $n = 2$ si ha $x(2) = x(N + 2) = 0$ poiché se N è dispari anche $N + 2$ è dispari. Procedendo così si dimostra che $x(\cdot)$ è nullo per tutti gli istanti pari. Ma per ipotesi $x(\cdot)$ è nullo su tutti i dispari e quindi è nullo per ogni $n \geq 0$. Ragionando in modo analogo si trova anche $x(n) = 0$ per ogni $n < 0$ e quindi $x(n) = 0$ su tutto l'asse, contrariamente all'ipotesi che $x(\cdot)$ fosse un segnale non nullo. Assurdo.

4.4

Sia $x(t)$ un segnale periodico, di periodo T. Dimostrare che il valore medio

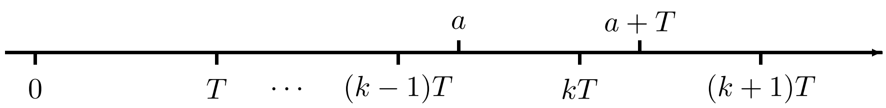
$$m^x_{[T]} := \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t)\, dt \;=\; \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t)\, dt\,,$$

non dipende da $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ fissato, esiste un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$(k-1)T \;\leq\; a \;<\; kT \;\leq\; a + T \;<\; (k+1)T.$$



È sufficiente considerare gli integrali non normalizzati. Per l'addittività

$$\int_a^{a+T} x(t)\, dt = \left[\, \int_a^{kT} + \int_{kT}^{a+T} \,\right] x(t)\, dt,$$

ma per il secondo addendo vale

$$\int_{kT}^{a+T} x(t)\, dt = \int_{(k-1)T}^{a} x(t)\, dt\,,$$

[a membro sinistro cambio di variabile $t' = t - T$ e uso di $x(t) = x(t + T)$], quindi

$$\int_a^{a+T} x(t)\, dt = \left[\, \int_{(k-1)T}^{a} + \int_a^{kT} \,\right] x(t)\, dt = \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)\, dt = \int_0^T x(t)\, dt\,,$$

[per l'ultimo passaggio: cambio di variabile $t' = t - (k-1)T$ e periodicità di $x(t)$]. Conclusione: il valore medio non dipende da $a \in \mathbb{R}$.