Esercizi proposti 2
soluzioni

Segnali – parametri riassuntivi

2.1

In questo esercizio $x(t)$ ed $y(t)$ sono segnali a valori in $\mathbb{C}$ e ad energia finita su $[t_1, t_2]$, ovvero

$$x(t), y(t) \,\in\, L^2([t_1, t_2]) := \left\{ w(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{t_1}^{t_2} |w(t)|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Si dimostri il seguente teorema.

Teorema di Pitagora. Siano $x(t), y(t) \,\in\, L^2([t_1, t_2])$, e sia $z(t) := x(t) + y(t)$ allora, se

$$E^{xy}_{[t_1,t_2]} = 0,$$

vale la seguente relazione tra le energie

$$E^{z}_{[t_1,t_2]} = E^{x}_{[t_1,t_2]} + E^{y}_{[t_1,t_2]} \,.$$

Commento. Lo stesso risultato vale per dominio illimitato e per segnali discreti. Il motivo per cui questo risultato debba essere chiamato teorema di Pitagora risulterà chiaro a breve.

Caso particolare. Si verifichi che i segnali $x(t) = \sin t$, e $y(t) = \cos t$ soddisfano il teorema di Pitagora sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Soluzione

Basta svolgere il calcolo dell'energia di $z(t)$ sull'intervallo $[t_1, t_2]$,

$$\begin{aligned}
E^{z}_{[t_1,t_2]} &= \int_{t_1}^{t_2} |z(t)|^2 \, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} |x(t) + y(y)|^2 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) + y(t)\big)\overline{\big(x(t) + y(t)\big)} \, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big[|x(t)|^2 + |y(t)|^2 + x(t)\overline{y(t)} + \overline{x(t)}y(t) \Big] \, dt \\
&= E^{x}_{[t_1,t_2]} + E^{y}_{[t_1,t_2]} + E^{xy}_{[t_1,t_2]} + \overline{E^{xy}_{[t_1,t_2]}} \,,
\end{aligned}$$

che sotto l'ipotesi $E^{xy}_{[t_1,t_2]} = 0$ si riduce a $E^{z}_{[t_1,t_2]} = E^{x}_{[t_1,t_2]} + E^{y}_{[t_1,t_2]}$.

Per verificare il caso particolare è sufficiente osservare che

$$E^{\sin t, \cos t}_{[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} \cos t \, \sin t \, dt = 0 \,,$$

un conto banale che vedremo essere alla base della teoria delle serie di Fourier.

2.2

Calcolare energia su $\mathbb{R}$ e potenza media su $\mathbb{R}$ dei segnali

$$x_1(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}\, u(t-1), \qquad x_2(t) = \sin t\,, \qquad x_3(t) = tu(t)\,.$$

Soluzione

Per l'energia di x_1,

$$\begin{aligned} E^{x_1} &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\, u(t-1)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{1}^{T} \frac{1}{t}\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\ \log T \ = +\infty\,. \end{aligned}$$

Per la potenza media di x_1,

$$\begin{aligned} P^{x_1} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\, u(t-1)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{1}^{T} \frac{1}{t}\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\ \frac{\log T}{2T} \ = \ 0\,. \end{aligned}$$

Per l'energia di x_2,

$$\begin{aligned} E^{x_2} &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \sin^2 t\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\ T - \frac{1}{4} \sin 2t\Big|_{-T}^{T} \ = +\infty\,, \end{aligned}$$

infatti $T \to \infty$, mentre $|\sin 2T| \leq 1$ per ogni $T \in \mathbb{R}$.

Per la potenza media di x_2,

$$\begin{aligned} P^{x_2} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin^2 t\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{2T} \left(T - \left[\frac{1}{4} \sin 2t\Big|_{-T}^{T} \right] \right) \ = \ \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Per l'energia di x_3,

$$\begin{aligned} E^{x_3} &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \big[tu(t)\big]^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} t^2\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\ \frac{T^3}{3} \ = +\infty\,. \end{aligned}$$

Per la potenza media di x_3,

$$\begin{aligned} P^{x_3} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \big[tu(t)\big]^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} t^2\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{2T} \frac{T^3}{3} \ = +\infty\,. \end{aligned}$$

2.3

Calcolare energia su $\mathbb{Z}$ e potenza media su $\mathbb{Z}$ dei segnali

$$x_1(n) = 3^n e^{jn\frac{\pi}{3}}\, u(-n)\,; \qquad x_2(n) = n\left[u(n) - u(n-3)\right].$$

Soluzione

Per l'energia di x_1,

$$\begin{aligned} E^{x_1} &:= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \left|3^k e^{jk\frac{\pi}{3}}\, u(-k)\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{0} \left|3^k e^{jk\frac{\pi}{3}}\right|^2 \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{0} 9^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} 9^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}\,. \end{aligned}$$

Per l'energia di x_2, si deve resistere fortissimamente alla tentazione di fare i conti applicando le formule alla cieca, rinunciando per principio a capire.

Conto alla cieca

$$E^{x_2} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \Big(n\left[u(n) - u(n-3)\right]\Big)^2$$

Per semplificare i termini della serie si sviluppa il quadrato come segue,

$$\begin{aligned} \Big(n\left[u(n) - u(n-3)\right]\Big)^2 &= n^2\big[u^2(n) + u^2(n-3) - 2u(n)u(n-3)\big] \\ &= n^2\big[u(n) - u(n-3)\big], \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto dei seguenti fatti evidenti $u^2(n) = u(n)$, $u^2(n-3) = u(n-3)$, e $u(n)u(n-3) = u(n-3)$. Se questi fatti NON vi sono evidenti dovete fermarvi e convincervene ORA. Tracciare i grafici aiuta. Sostituendo nel calcolo dell'energia si ottiene

$$\begin{aligned} E^{x_2} &:= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} n^2\left[u(n) - u(n-3)\right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n^2 - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{N} n^2 \;=\; +\infty - \infty\,. \end{aligned}$$

Siamo giunti ad una forma indeterminata e dunque il conto alla cieca oltre ad essere oneroso non conduce ad un risultato utile.

Conto consapevole Bisogna estrarre quanta più informazione possibile dai dati prima di applicare le formule. In particolare è immediato rendersi conto che il segnale $x_2(n)$ è nullo per tutti gli $n \le 0$ e per tutti gli $n \ge 3$ infatti $u(n) - u(n-3) = 1$ per $n = 0, 1, 2$ ed è nullo altrove. Quindi

$$E^{x_2} := \sum_{n=1}^{2} n^2 \;= 1 + 4 = 5\,.$$

Le potenze medie su $\mathbb{Z}$ di x_1 e di x_2 sono entrambe nulle poiché l'energia su $\mathbb{Z}$ è finita per entrambi i segnali.

2.4

Calcolare l'energia mutua su tutto l'asse tra le seguenti coppie di segnali

$$x_1(t) = je^{-|t|}\,, \qquad x_2(t) \;= e^{-2|t|}\,.$$
$$x_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\,, \qquad x_4(n) = \frac{j}{2}\,.$$

Nota bene: $x_4(n)$ è un segnale costante!

Soluzione

Per la coppia x_1, x_2,

$$\begin{aligned} E^{x_1,x_2} &= {}_{vp}\!\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}\,dt = {}_{vp}\!\int_{-\infty}^{\infty} je^{-|t|}\,e^{-2|t|}\,dt \\ &= {}_{vp}\!\int_{-\infty}^{\infty} je^{-3|t|}\,dt \\ & 2j\int_0^{\infty} e^{-3t}\,dt = 2j\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,j\,, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che la funzione $e^{-3|t|}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ ed è pari.

Per la coppia x_3 , x_4

$$\begin{aligned} E^{x_3,x_4} &= {}_{vp}\!\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)\overline{x_4(n)} \;=\; {}_{vp}\!\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\,\overline{\frac{j}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{-j}{2} \;=\; \frac{-j}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -j \end{aligned}$$

2.5

Sia $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, un segnale a valori reali, di media $m^x_{[t_0,t_1]} = 0$. Si calcoli l'energia $E^y_{[t_0,t_1]}$, dove

$$y(t) := 2 - x(t)\,.$$

Soluzione

$$\begin{aligned} E^y_{[t_0,t_1]} &= \int_{t_0}^{t_1} \big(y(t)\big)^2\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \big(2 - x(t)\big)^2\,dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Big[\,4 + \big(x(t)\big)^2 - 4x(t)\,\Big]\,dt \\ &= 4(t_1 - t_0) + E^x_{[t_0,t_1]}, \end{aligned}$$

tenendo conto del fatto che $m^x_{[t_0,t_1]} = 0$ equivale a $\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt = 0$.

Osservazione. Si metta in relazione questo risultato con l'Esercizio 2.1.