Ho f su $x_0, \dots, x_{N-1}$ con $f_0 \dots f_{N-1}$

Il solo polinomio di ordine $N-1$ è dato dalla formula di Lagrange

$$p_{n-1}(x) = \sum_{j=1,n} f_j \prod_{\substack{k=1,n \\ k \neq j}} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

L'idea di Newton-Côtes è di trovare p_{n-1} e poi integrare analiticamente non è buona. Il polinomio diverge per N non piccolo

Esempio $\quad f(x) = x \sin(20x)$

PROBLEMA: DOMINIO DI INTEGRAZIONE $[0, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Soluzione: considero $g(y)$ con $y \in [0, 1[$

$g(y)$ monotona e tale che $\begin{cases} g(0) = 0 \\ \lim_{y \to 1^-} g(y) = +\infty \end{cases}$

$$x = g(y)$$

$$dx = \left(\frac{dg(y)}{dy}\right) dy$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(g(y)) \left(\frac{dg(y)}{dy}\right) dy$$

Possibili funzioni $g(y)$: $\frac{y}{1-y}$

INTEGRAZIONE SU PIÙ DIMENSIONI

Sia $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ $\qquad \vec{x} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$

Uso griglia equispaziata con N punti in ogni dimensione (in totale N^M punti)

$$\int_{x_0^{(1)}}^{x_N^{(1)}} dx_1 \int_{x_0^{(2)}}^{x_N^{(2)}} dx_2 \dots \int_{x_0^{(M)}}^{x_N^{(M)}} dx_M \, f(x_1, \dots, x_M)$$

$$= \int_{x_0^{(1)}}^{x_N^{(1)}} dx_1 \dots \int_{x_0^{(M-1)}}^{x_N^{(M)}} \sum_{i=0,N-1} f(x_1, \dots, x_{M-1}, x^{(M)}_{i+\frac{1}{2}}) h^{(M)} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$= \sum_{i^{(1)}=0,N-1} \sum_{i^{(2)}=0,N-1} \dots \sum_{i^{(M)}=0,N-1} f\left(x^{(1)}_{i^{(1)}+\frac{1}{2}}, x^{(2)}_{i^{(2)}+\frac{1}{2}}, \dots, x^{(M)}_{i^{(M)}+\frac{1}{2}}\right) h^{(1)} \dots h^{(M)} + M\, O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Se $N_{sampling} = N^M$

allora $O\left(\frac{1}{N_{sampling}^{2/M}}\right)$