UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I
Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Esercizi di ripasso e di riscaldamento

Tutor: Guido Costagliola
Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"It is not knowledge, but the act of learning,
not possession but the act of getting there,
which grants the greatest enjoyment".

-C.F.Gauss

1 Teoria degli insiemi

1.1 Esercizio 1

Scrivere in forma esplicita i seguenti insiemi.

1. $\mathcal{I}_1 = \{w \in \mathbb{R}^+ : 3w^2 - 1 = 6w\}$;
2. $\mathcal{I}_2 = \{x \in \mathbb{N} : 3x < x + 8\}$;
3. $\mathcal{I}_3 = \{d \in \mathbb{Z} : 5 - d^2 \in \mathbb{N}\}$.

1.2 Esercizio 2

Trovare l'estremo superiore dei seguenti insiemi e dire se è anche un massimo per gli stessi.

1. $\mathcal{A} = (0, 1] \cup [2, 3]$;
2. $\mathcal{B} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$;
3. $\mathcal{C} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ...\}$.

1.3 Esercizio 3

Calcolare unione, intersezione e differenza tra i seguenti insiemi.

1. $\alpha = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x = 2\}, \qquad \beta = \mathbb{R}^-$;
2. $\gamma = (-\infty, 2], \qquad \delta = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\}$.

2 Equazioni in $\mathbb{R}$

Risolvere le seguenti equazioni con x variabile reale.

1. $x^3 - x^2 - 2x = 0$;
2. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$;
3. $x = |x|$.

3 Disequazioni

Risolvere le seguenti disequazioni.

1. $\frac{2-x}{x-1} \geq 0$;
2. $x^2 + 3x + 2 < 0$;
3. $x^3 + x < 0$;
4. $\frac{|x-3|}{|2x+1|} \geq \frac{1}{2}$.

4 Proprietà e dominio di funzioni

4.1 Esercizio 1

Valutare il periodo, se esiste, delle seguenti funzioni.

1. $f_1(x) = \cos(4x)$;
2. $f_2(x) = x \cos x$.

4.2 Esercizio 2

Dire se le seguenti funzioni sono pari, dispari o nessuna delle due opzioni.

1. $g_1(x) = x \log(\cos x)$;
2. $g_2(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{3}$;
3. $g_3(x) = \frac{\sin x}{x}$.

4.3 Esercizio 3

Valutare il dominio delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = \frac{x}{4 - 2^{\frac{1}{x}}}$;
2. $g(x) = \arcsin{(x+1)}$;
3. $h(x) = \log(1 - \arctan x)$;
4. $k(x) = \sqrt{\log(\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x})}$;
5. $w(x) = \tan(\arccos \frac{x}{x+2})$.

Soluzioni

Teoria degli insiemi

Esercizio 1

1. Risolvendo l'equazione $3w^2-6w-1$, si trovano due soluzioni distinte $\left\{1-\frac{2}{\sqrt{3}}, 1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$, di cui la prima negativa e la seconda positiva, dunque $\mathcal{I}_1 = \left\{1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$;

2. La condizione impone che $x < 4$, pertanto $\mathcal{I}_2 = \{0, 1, 2, 3\}$, nella convenzione in cui $0 \in \mathbb{N}$;

3. Notiamo innanzitutto che $d^2 \geq 0 \ \forall d \in \mathbb{Z}$. Affinché $5 - d^2 \in \mathbb{N}$, $d^2 = 1, 2, 3, 4, 5$, ma dato che $d \in \mathbb{Z}$, si ottiene $\mathcal{I}_3 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

Esercizio 2

1. L'estremo superiore è 3 ed è anche il massimo;

2. L'estremo superiore è 1 ed è anche il massimo;

3. L'estremo superiore è $\frac{1}{2}$ ed è anche il massimo.

Esercizio 3

1. Risolvendo l'equazione $x^2 - x - 2 = 0$, si ottengono gli elementi di $\alpha = \{-1, 2\}$. Allora $\alpha \cup \beta = \mathbb{R}^- \cup \{2\}$, $\alpha \cap \beta = \{-1\}$ ed infine $\alpha/\beta = \{2\}$;

2. Notando che $x^2 > 0$ è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$, si ottiene $\gamma \cup \delta = \mathbb{R}$, $\gamma \cap \delta = (-\infty, 2]/\{0\}$ ed infine $\gamma/\delta = \{0\}$.

Equazioni in $\mathbb{R}$

1. Raccogliendo x si ottiene $x(x^2 - x - 2) = 0$. Riconoscendo poi un trinomio notevole, scomponiamo in $x(x-2)(x+1) = 0$. Le soluzioni allora sono: $x = \{-1, 0, 2\}$;

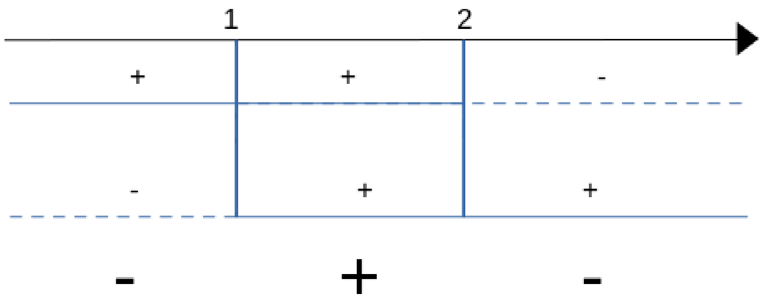
2. Applichiamo la sostituzione $x^2 = y$, trovando così $y^2 - 2y - 3 = 0$. Riconoscendo un trinomio notevole, scomponiamo in $(y-3)(y+1) = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono: $y = \{-1, 3\}$. Ricordando che $x^2 = y$, la prima $y = -1$ non è accettabile in campo reale, mentre $y = 3$ porta a $x = \{\pm\sqrt{3}\}$;

3. Ricordando che $|x| = x$ per $x \geq 0$ e $|x| = -x$ per $x < 0$, le soluzioni sono i reali positivi, compreso lo 0.

Disequazioni

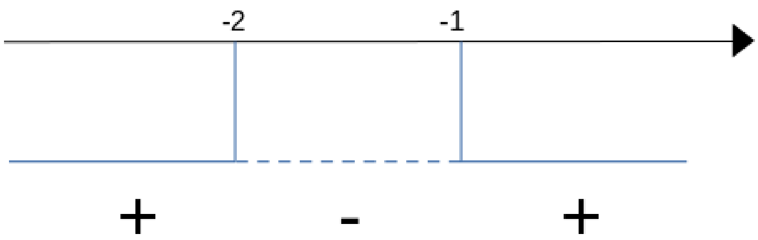
1. Studiamo il segno di numeratore e denominatore. Il numeratore è positivo per $x < 2$, negativo per $x > 2$ e nullo per $x = 2$. Il denominatore è positivo per $x > -1$, negativo per $x < -1$ e nullo per $x = 1$ (valore da escludere dall'insieme

di definizione). Mettendo insieme il tutto, le soluzioni della disequazione sono: $x \in (1, 2]$.



Studio del segno.

2. Riconosciamo un trinomio notevole e scomponiamo in $(x+2)(x+1) < 0$. Le radici del polinomio sono $x = -1$ e $x = -2$. Il segno del polinomio è positivo (segno concorde ad x^2) per valori esterni all'intervallo delle radici, mentre è negativo per valori interni. Dunque le soluzioni sono $-2 < x < -1$.



Studio del segno.

3. Mettendo in evidenza x otteniamo $x(x^2+1) < 0$. Il termine (x^2+1) è sempre positivo, per qualsiasi valore di $x \in \mathbb{R}$, dunque il segno del polinomio dipende solo dal termine x. Pertanto le soluzioni sono i reali negativi $x < 0$.

4. Dobbiamo per prima cosa lavorare sui valori assoluti. Notiamo che $|x-3| = x-3$ per $x \geq 3$ e $|x-3| = 3-x$ per $x < 3$. Invece $|2x+1| = 2x+1$ per $x \geq -\frac{1}{2}$ mentre $|2x+1| = -2x-1$ per $x - \frac{1}{2}$. Dunque, dobbiamo risolvere tre disequazioni diverse su tre intervalli reali: $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $[-\frac{1}{2}, 3)$, $[3, +\infty)$.
Svolgendo attentamente i calcoli, come nei casi precedenti, si ottiene la soluzione $x \leq \frac{5}{4}$, escluso $-\frac{1}{2}$ dove la frazione non è definita.

Proprietà e dominio di funzioni

Esercizio 1

1. La funzione è periodica in quanto il coseno è periodico. In particolare il periodo è $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

2. La funzione non è periodica poiché formata dal prodotto di una funzione periodica $\cos x$, di periodo $T = 2\pi$, e di una funzione non periodica, bensì lineare, x.

Esercizio 2

1. Valutando $g_1(-x) = -x\log(\cos(-x)) = -x\log(\cos x) = -g_1(x)$. Dunque la funzione è dispari;

2. Valutando $g_2(-x) = \frac{2^{-x}+2^{x}}{3} = g_2(x)$. Dunque la funzione è pari;

3. Valutando $g_3(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = g_3(x)$, dunque la funzione è pari.

Esercizio 3

1. Per trovare il dominio di f, bisogna porre il denominatore diverso da 0: $4 - 2^{\frac{1}{x}} \neq 0$. Risolvendo l'equazione $4 - 2^{\frac{1}{x}} = 2^2 - 2^{\frac{1}{x}} = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$. Inoltre bisogna imporre $x \neq 0$;

2. Ricordando che il dominio dell'arcoseno $\arcsin x$ è $[-1, 1]$. Il dominio della funzione g si trova ponendo $-1 \leq x + 1 \leq 1$, ovvero $-2 \leq x \leq 0$;

3. Il dominio della funzione $\arctan x$ è $\mathbb{R}$, dunque per trovare il dominio di h, dobbiamo solo imporre $1 - \arctan x > 0 \iff \arctan x < 1 \iff x < \frac{\pi}{4}$. Pertanto l'insieme di definizione è $(-\infty, \frac{\pi}{4})$;

4. Per trovare il dominio di k, diverse condizioni devono essere imposte:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{4-x} > 0 \quad \text{(i)} \\ \log(\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x}) \geq 0 \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

   La (i) è sempre soddisfatta, essendo le radici definite positive, a patto che queste siano effettivamente definite.
   La (ii) si risolve ponendo $\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x} \geq 1$. Quadrando entrambi i membri si ottiene $x-3+4-x+2\sqrt{(x-3)(4-x)} \geq 1 \iff \sqrt{(x-3)(4-x)} \geq 0$. Risolvendo la disequazione, si trova che $3 \leq x \leq 4$.
   Includendo tutte le condizioni, il dominio è $[3, 4]$.

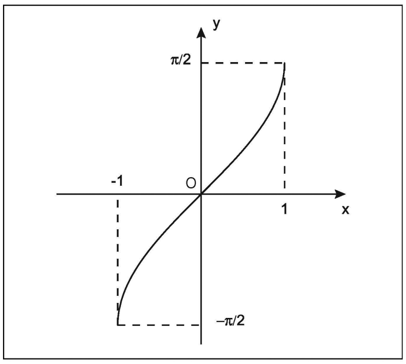
5. Ricordiamo il dominio delle funzioni elementari $\tan x$: $(-\infty, +\infty)$ esclusi i punti della forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, e $\arccos x$: $[-1, 1]$. Dalla seconda condizione, deriva che $-1 \leq \frac{x}{x+2} \leq 1$, ovvero

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} - 1 \leq 0 \\ \frac{x}{x+2} + 1 \geq 0 \end{cases}$$

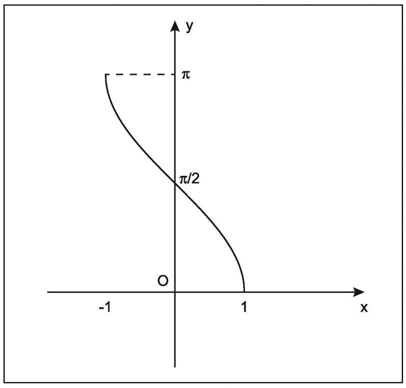
Da cui si arriva a:

$$\begin{cases} -\frac{2}{x+2} \leq 0 \\ \frac{2x+2}{x+2} \geq 0 \end{cases}$$

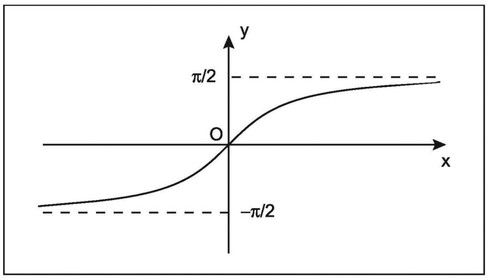
Dalla prima condizione si ottiene $x > -2$, mentre dalla seconda $x < -2$ o $x \geq -1$.
Prendendone l'intersezione: $x \geq -1$.
L'immagine della funzione $\arccos x$ è $[0, \pi]$, dunque per ultima cosa dobbiamo porre $\arccos(\frac{x}{x+2}) \neq \frac{\pi}{2} \iff \frac{x}{x+2} \neq 0 \iff x \neq 0$.
Pertanto il dominio è $x \geq -1 \wedge x \neq 0$.



(a) $y = \arcsin x$



(b) $y = \arccos x$



(c) $y = \arctan x$

Figure 1: Grafici delle inverse delle funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente.