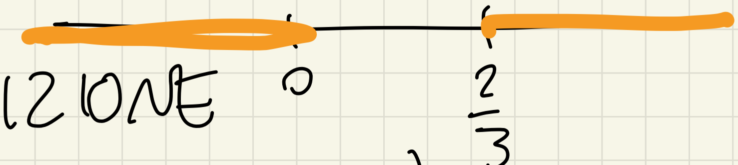
Continuiamo esercizio di ieri

$$\sqrt{3x^2-2x} \geq \boxed{3x-1}$$

cerco soluzioni nell'insieme $x \geq \frac{2}{3}$ oppure $x \leq 0$

(cond. esistenza radice)



$\sqrt{3x^2-2x} \geq 0$ PER DEFINIZIONE

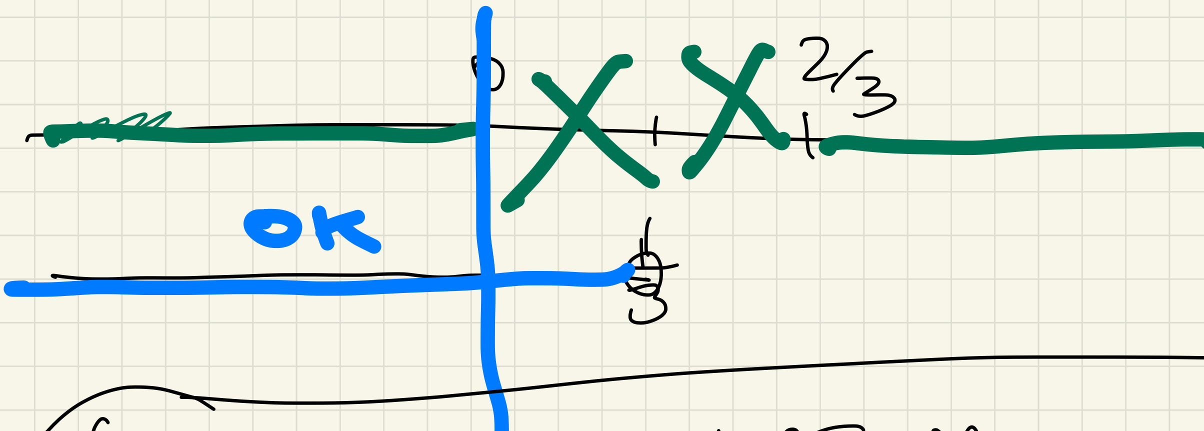
(perché le radici sono POSITIVE)

SE $3x-1<0$ LA DISEGUAGLIANZA È VERA!

$x<1/3$

Se $x < \frac{1}{3}$ $\quad 3x-1<0 \quad$ $\sqrt{3x^2-2x} \geq 0 > 3x-1$

$x \leq 0$ oppure $x \geq \frac{2}{3}$ perché radice sia ben definita

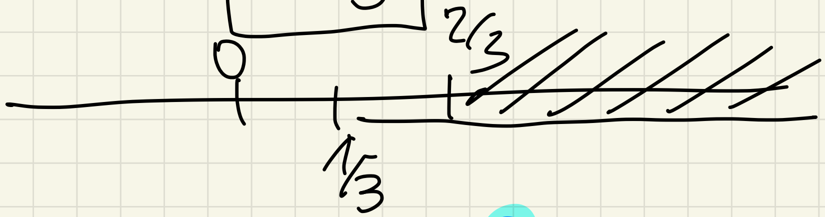


Se $x \leq 0$ la DISEGUAGLIANZA è verificata

$x \leq 0$ è una soluzione

per $\boxed{x > \frac{1}{3}}$ $\quad 3x-1 \ge 0$

$\left(x \ge \frac{2}{3}\right.$ per condiz esistenza)



$$\Big(\underbrace{\sqrt{3x^2-2x}}_{\ge 0}\Big)^2 \ge \big(\underbrace{3x-1}_{\ge 0}\big)^2$$

$(a+b)^2 =$

$= a^2+b^2+2ab$

$a = 3x$

$b = -1$

$$3x^2-2x \ge 9x^2+1-6x$$

$$3x^2-9x^2-2x+6x-1 \ge 0$$

$$-6x^2+4x-1 \ge 0$$

$$-6x^2+4x-1 \geq 0$$

Cambio segno a tutti i termini e inverto diseguaglianza:

$$6x^2-4x+1 \leq 0 \rightarrow$$ NON HA SOLUZ. $\nexists x$

radici polinomio $6x^2-4x+1=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{12} \quad \Delta<0$$

NON HO RADICI REALI DEL POLINOMIO

Un polinomio di 2° grado senza radici reali e con coeff. di x^2 POSITIVO E' SEMPRE POSITIVO

Riassumendo

$$\sqrt{3x^2-2x} \geq 3x-1$$

ho sol. $x \leq 0$.

es

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{3} \cdot x$$

prima di tutto studio $1-x^2 \geq 0$ (condizione di esistenza

$$1-x^2 \geq 0 \quad -1+x^2 \leq 0$$

$$\boxed{x^2-1 \leq 0} \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

~~$x^2-1 \leq 0$ $x^2 \leq 1$ $x \leq 1$~~

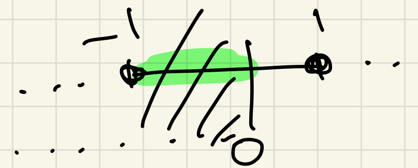
$x^2-1=0 \rightarrow x=+1$, $x=-1$

la dis. si risolve solo nell'intervallo

$$[-1, 1]$$

$$-1 \le x \le 1$$

$$\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{3}\, x$$



se $\sqrt{3} \cdot x < 0$ se $x < 0$

$$\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{3} \cdot x < 0$$

IMPOSSIBILE

→ NON HO SOLUZIONI perché $\sqrt{1-x^2} \ge 0$.

$x < 0$ NON PUÒ mai essere soluzione

$\boxed{x \in [-1, 0) \text{ NON HO SOLUZIONI}}$

$$x \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{3} \cdot x\right)^2$$

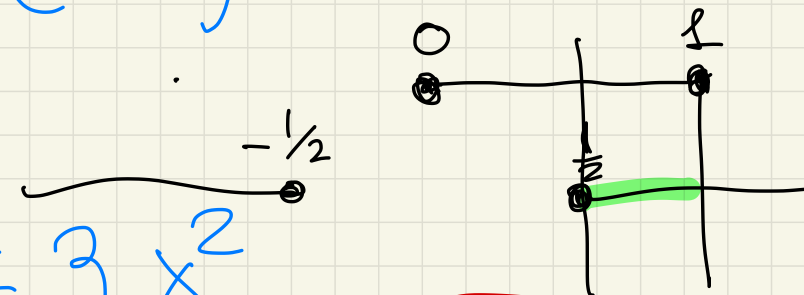
$$1 - x^2 \leq 3x^2$$

$$1 - x^2 - 3x^2 \leq 0$$

$$1 - 4x^2 \leq 0$$

$$\boxed{-1 + 4x^2 \geq 0}$$

$$4x^2 - 1 \geq 0$$



$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$4x^2 - 1 \geq 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad x = -\frac{1}{2}$$

$$\cancel{x \leq -\frac{1}{2}} \qquad x \geq \frac{1}{2}$$

$a \in \mathbb{R}$ $\qquad a^{\frac{1}{n}}$ (n pari $\quad a \geq 0$!) $\to a^{\frac{1}{n}} \geq 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ n dispari $\quad a$ qualsiasi

$a^{\frac{1}{n}}$ = radice n-esima di a.

$$\underset{\downarrow}{a^{\frac{m}{n}}} = \underbrace{\left(a^{m}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{radice } n\text{-esima di } a^m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$: potenza m-esima della radice n-esima di a

$$3^{\frac{3}{4}} = \left(3^{3}\right)^{\frac{1}{4}} = 27^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{27} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^{3}$$

$a^{\frac{m}{n}}$ è ben definito $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ solo R

$a \geq 0$

$0^{\frac{m}{n}} = 0$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\cancel{(-3)^{\frac{3}{2}}} = \cancel{\sqrt{(-3)^3}} = \cancel{\left(\sqrt{-3}\right)^3}$

$= \cancel{\sqrt{-27}}$ $\quad \cancel{\left(\sqrt{-3}\right)^3}$

Vorrei definire POTENZE con ESPONENTE REALE

per es. voglio dare significato

$$\underset{a=3}{3}^{\sqrt{2}} \overset{\text{PER DEFINIZIONE}}{:=} \underbrace{\sup}_{\substack{\downarrow \\ \text{estremo} \\ \text{superiore}}} \left\{ 3^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{3^m}, \text{ ove } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad n \neq 0 \quad m, n > 0 \quad \frac{m}{n} \leq \sqrt{2} \right\}$$

$3^{\sqrt{2}}$ lo approssimo $3^{\frac{14}{10}}$ $3^{\frac{141}{100}}$

fisso $\boxed{a>0}$ e definisco

$r \in \mathbb{R}$ $r>0$ $\quad a^0 = 1$

$$a^r = \sup \left\{ a^{\frac{m}{n}} \ , \ \frac{m}{n} \leq r \quad m,n>0 \right\}$$

se $r<0$ $\quad a^{-|r|} = \left(\frac{1}{a}\right)^{|r|} \quad a^{-|r|} = \left(a^{-1}\right)^{|r|} =$

$r<0$ $\quad = \left(\frac{1}{a}\right)^{|r|}$

$r = -|r|$

LOGARITMO

$$\boxed{x = \log_a b}$$

(BASE POTENZA)

FISSO: $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$

$b \in \mathbb{R}$ $b > 0$

x si chiama LOGARITMO in base a di b se

$$\boxed{a^x = b}$$

$a^x = b \Rightarrow b \overset{!!}{>} 0$

$$\boxed{a^x > 0 \quad \forall x}$$

(x è l'esponente che devo mettere alla base a per ottenere il valore b).

es. $a>0$

$\lg_a a$ = qual è esponente da dare ad a per avere a? $= 1$

$a^1 = a$

$\boxed{\lg_a 1 = 0}$ $\quad a^0 = 1$

esponente da dare ad a per avere 1 è 0.

$\cancel{\lg_a 0}$ NON ESISTE $\quad a^x \neq 0$

$$\lg_a\left(\frac{1}{a^2}\right) = -2$$

$$\lg_a\left(a^3\right) = 3$$

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$\lg_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

Proprietà logaritmi (che si dimostrano utilizzando le proprietà delle potenze)

$a > 0$ base

$b, c > 0$

$$\underbrace{\log_a (b \cdot c)}_{x} = \overbrace{\log_a b}^{y} + \overbrace{\log_a c}^{z}$$

$a^y = b \qquad a^z = c$

$a^x = b \cdot c$

$$a^x = b \cdot c = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$$

$$\lg_a\left(\frac{b}{c}\right) = \lg_a b - \lg_a c$$

$(b>0)$

$$\underbrace{\lg_a\left(b^{k}\right)}_{x} = k \cdot \underbrace{\boxed{\lg_a b}}_{y}$$

$$a^y = b$$

$$\boxed{a^x = b^k} = \left(a^y\right)^k = a^{y \cdot k}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$x \neq 0$

$$\lg_a\left(x^2\right) = 2\lg_a|x|$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3$$

base che scegliamo per il logaritmo è il numero e (numero di Nepero)

$$e := \sup \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n , \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{array} \right\}$$

e numero reale compreso tra 2 e 3

$$e \simeq 2,781..$$

$\lg_e b$ $\qquad$ $\lg b$ (SE NON SCRIVO LA BASE INTENDO BASE e).

$\log b = x$ per $b > 0$

$\Updownarrow$

$e^x = b$

OSSERVAZ. di base

$(e > 1 \; !!)$

se $b > c > 0$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\log b}_{x} > \underbrace{\log c}_{y}$

$b = e^x > e^y = c$

$\Updownarrow$

$x > y$