I SEGNALI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Segnali a Tempo continuo (t.c.)

Sono funzioni di variabile reale e valore complesso:

$$x : t \in \mathbb{R} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{C}$$

Esempio $\quad x(t) = e^{jt}$

$\quad x(t) = t^2 + jt$

Anche segnali definiti su intervalli o unioni d'intervalli sono considerati t.c.

Caso particolare: Un segnale x è detto reale $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \ x(t) \in \mathbb{R}$

Segnali equivalenti: quando introdurremo la nozione di distanza tra segnali, definiremo come segnali equivalenti quelli a distanza nulla l'uno dall'altro

Segnali a Tempo discreto (t.d.)

Sono funzioni definite su $\mathbb{Z}$ (dette a volte "successioni bilatere", in contrasto con le successioni "monolatere", o successioni tout court, definite in $\mathbb{N}$)

$$x : n \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

Esempio: $\quad x_n = j^n$

$\quad x_n = \cos\left(2\pi \cdot \frac{3}{4} n\right) + j \sin\left(2\pi \cdot \frac{3}{4} n\right)$

Anche segnali definiti su insiemi del Tipo: $\{0, 1, \ldots N-1\} \subset \mathbb{Z}$ sono considerati segnali a Tempo discreto. Sono detti anche "segnali finiti" e sono concettualmente equivalenti a segnali t.d. periodici di periodo N. Infatti è come se definissimo un segnale periodico assegnando i valori assunti su di un singolo periodo.

Segnali t.c. notevoli

1) Funzione indicatrice

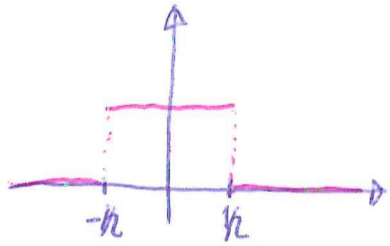
Dato un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, si definisce <u>funzione indicatrice di X</u>, e si indica con I_X, la funzione che vale 1 in X e zero altrove:

$$I_X : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } t \in X \\ 0 & \text{se } t \notin X \end{cases}$$

2) Impulso rettangolare (o finestra rettangolare, o rect)

È definito tramite l'equazione seguente:

$$\text{rect} : t \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{se } |t| > 1/2 \end{cases}$$



? Ma quanto vale $\text{rect}(1/2)$?

In un certo senso, che chiariremo rigorosamente quando introdurremo il concetto di <u>distanza</u> tra segnali, non ha importanza. Il valore di un segnale t.c. in un singolo punto

o anche in un insieme discreto di punti,
non ne cambia essenzialmente la natura.

Quando necessario, fisseremo il valore della finestra rettangolare usando la notazione Rect: $\mathrm{Rect}(\pm 1/2) \triangleq 1/2$ (media tra lim. sx e dx)

Possiamo vedere rect come funzione indicatrice di $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Ricordiamo che $[-1/2, 1/2]$ è l'intervallo chiuso
$]-1/2, 1/2[$ è l'intervallo aperto
$(-1/2, 1/2)$ può indicare entrambi

questo rispecchia l'ambiguità della definizione

Infine vedremo che la distanza tra due segnali T.c. non dipende dal valore in un punto: quindi la distanza tra Rect e rect (comunque si scelga $\mathrm{rect}(\pm 1/2)$) è sempre zero

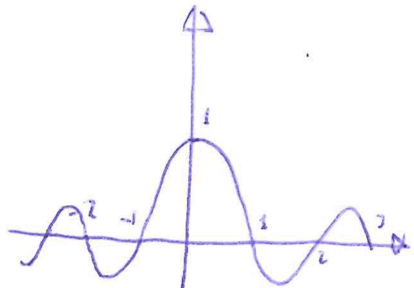
3 Seno cardinale o sinc

$$\mathrm{sinc} : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} & \forall t \neq 0 \end{cases}$$

Funzione continua in $\mathbb{R}$ (infatti $\lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1$)

Funzione infinitamente derivabile

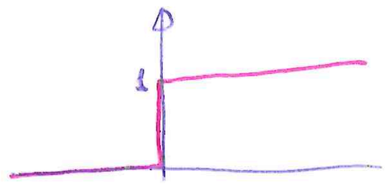
Si annulla in tutti gli interi tranne zero



Non è assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$ perché $|x|^{-1}$ decresce troppo lentamente (senza dim.)

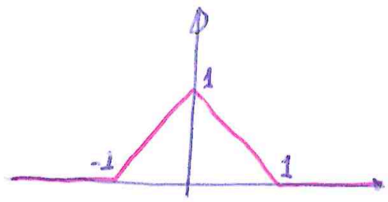
4 Gradino unitario, $u(t)$

$$u : t \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



È quindi la funzione indicatrice di $\mathbb{R}^+$

5 Finestra Triangolare, $\Lambda(t)$



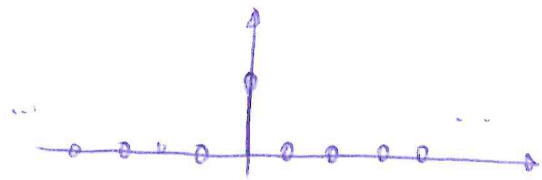
$$\Lambda : t \in \mathbb{R} \to (1 - |t|)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 1 + t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

continua e derivabile quasi ovunque

Segnali notevoli a tempo discreto

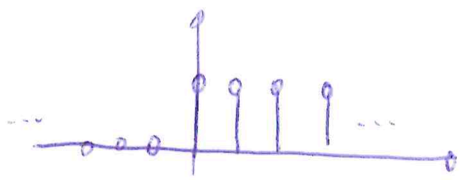
6 Delta discreta o delta di Kronecker

$$\delta : n \in \mathbb{Z} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$



7 Gradino discreto

$$u : n \in \mathbb{Z} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$



Tecnica della funzione indicatrice (o Trucco della funzione indicatrice)

Ci troveremo a volte a dover calcolare degli integrali nella forma $\int_a^b f(t)\,dt$ o più in generale $\int_X f(t)\,dt$

dove $X \subset \mathbb{R}$

In alcuni casi è utile ricondurre tale integrale ad un integrale su $\mathbb{R}$ (ammesso che f sia definita su $\mathbb{R}$).
A tale scopo basta introdurre la funzione indicatrice di X

Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} I_X(t)\, f(t)\,dt \overset{(a)}{=} \int_X I_X(t) f(t)\,dt + \int_{\mathbb{R}-X} I_X(t)\, f(t)\,dt$$

$$\overset{(b)}{=} \int_X f(t)\,dt$$

(a) Siccome $X, \mathbb{R}-X$ è una partizione di $\mathbb{R}$, l'integrale su $\mathbb{R}$ può essere scomposto nella somma dei due integrali

(b) $\forall t \in X, \quad I_X(t) \cdot f(t) = f(t)$
$\forall t \notin X, \quad I_X(t) \cdot f(t) = 0$

Quindi
$$\int_X f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} I_X(t)\, f(t)\,dt$$

Per esempio: $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, u(t)\,dt \quad ; \quad \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{rect}(t) f(t)\,dt$

Parametri riassuntivi dei segnali

1) Valor medio
2) Energia e mutua energia
3) Potenza

1.1) Valor medio di segnali a t.c.

Il valor medio nell'intervallo (t_1, t_2) di un segnale x il cui insieme di definizione include (t_1, t_2) è definito come

$$m_{(t_1,t_2)}[x] = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt$$

Il valor medio (o valor medio su $\mathbb{R}$) di un segnale x definito su $\mathbb{R}$ si definisce come

$$m[x] = \lim_{T\to+\infty} m_{(-T,T)}[x] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

Se x è limitato, $m_{(t_1,t_2)}[x]$ converge qualunque siano t_1 e t_2; invece non è detto che $m[x]$ converga

Esempi

Sia $x(t) = t$

$$m_{(0,1)}[x] = \int_0^1 t\,dt = 1/2$$

$$m_{(0,T)}[x] = \frac{1}{T}\int_0^T t\,dt = T/2$$

$$m_{[-T,T]}[x] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t\,dt = \frac{1}{2T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-T}^{T} = \frac{T^2-T^2}{4T} = 0$$

$$m[x] = 0$$

$x = \sin \pi t$

$$m_{(-1,1)}[x] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin \pi t \, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos \pi t}{\pi}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{\cos \pi - \cos(-\pi)}{2\pi} = 0$$

$x = t^2 \qquad m[x] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2\, dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{2}{3}T^3 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{3}T^2 = +\infty$

1.2 Valor medio di segnali a Tempo discreto

$$m_{(n_1, n_2)}[x] = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1}\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)$$

$$m[x] = \lim_{N\to+\infty} m_{(-N,N)}[x]$$

Linearità del valor medio

Per la linearità degli operatori somma ed integrale, si mostra facilmente che, qualunque siano i segnali x e y dotati di valor medio su I (con I che può essere (t_1, t_2), $\mathbb{R}$, oppure (n_1, n_2), $\mathbb{Z}$ nel caso t.d.) e qualunque siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha:

$$m_I[\alpha x + \beta y] = \alpha\, m_I[x] + \beta\, m_I[y]$$

Altro esempio del valor medio:

$$m_{(-1/2, 1/2)}[\text{rect}] = m_{(-1/2,1/2)}[\text{Rect}]$$

$m_I[\text{rect}] = m_I[\text{Rect}]$ qualunque sia l'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

questo perchè l'integrale non dipende dal valore in un numero discreto di punti

2.1 Energia di un segnale a t.c.

L'energia di un segnale x nell'intervallo (t_1, t_2) in cui è definito, è definita come:

$$E_{(t_1, t_2)}[x] \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$$

Siccome $|x(t)|^2 \geq 0 \quad \forall t$, l'energia è sempre ≥ 0

Inoltre $E_{(t_1,t_2)}[x] = 0$ se e solo se

x è identicamente nullo in (t_1, t_2), con l'esclusione di al più un numero finito di punti

Se si omette di menzionare l'intervallo, si sottintende di calcolare l'energia su $\mathbb{R}$ e cioè:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \qquad \left(\text{più precisamente } \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt\right)$$

Esempi

$$E[\mathrm{rect}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}^2(t)\, dt \stackrel{(a)}{=} \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, dt = 1$$

(a) trucco della funzione indicatrice: rect è la f.i. di $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$E[\Lambda] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (1-|t|)^2 \mathrm{rect}^2(t/2)\, dt \stackrel{(a)}{=} \int_{-1}^{1} (1-|t|)^2 \, dt =$$

$$\stackrel{(b)}{=} 2 \int_{0}^{1} (1-|t|)^2 \, dt \stackrel{(c)}{=} 2 \int_0^1 (1-t)^2 \, dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t^2 + t \right]_0^1 = 2/3$$

(a) trucco della funz. ind. (b) parità della funzione integranda

(c) $\forall t \in (0,1)$, $|t| = t$

2.2 Energia dei segnali a Tempo discreto

Si definisce come segue:

$$E_{(n_1, n_2)}[x] = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)|^2$$

$$E[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2$$

Wooclap KDOJPR 1-8

2.3 Mutua energia

Se x e y sono segnali t.c. definiti nell'intervallo (t_1, t_2), si definisce mutua energia di x e y la quantità seguente:

$$E_{(t_1, t_2)}[x, y] = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

La mutua energia su $\mathbb{R}$ è

$$E[x, y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

Se non si menziona l'intervallo, s'intende $\mathbb{R}$

Analogamente, a t.d. si ha:

$$E_{(n_1, n_2)}[x, y] = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)\, \overline{y(n)}$$

$$E[x, y] = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)\, \overline{y(n)}$$

N.B. La mutua energia di un segnale con se stesso, è la sua energia:
$E[x,x] = \int x\overline{x} = \int |x|^2$
Lo stesso per segnali a T.d.

3 Potenza media

E' il cosiddetto valor quadratico medio del segnale in un opportuno intervallo:

3.1 Potenza media in un intervallo finito per segnali t.c.

$$P_{(t_1,t_2)}[x] = \frac{1}{t_2-t_1} E_{(t_1,t_2)}[x] = m_{(t_1,t_2)}[|x|^2]$$

3.2 Potenza media su $\mathbb{R}$ per segnali t.c.

$$P[x] = \lim_{T\to+\infty} P_{(-T,T)}[x] = m[|x|^2] = \lim_{T\to+\infty} \frac{E_{(-T,T)}[x]}{2T}$$

3.3 Potenza media in un intervallo finito per segnali t.d.

$$P_{(n_1,n_2)}[x] = \frac{1}{n_2-n_1+1} E_{(n_1,n_2)}[x] = m_{(n_1,n_2)}[|x|^2]$$

3.4 Potenza media su $\mathbb{Z}$ per segnali t.d.

$$P[x] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} E_{(-N,N)}[x] = m[|x|^2]$$

I segnali ad energia finite hanno potenza nulla su $\mathbb{R}$

$$P[x] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} E_{(-T,T)}[x]$$

finito

tende a $+\infty$

Tali segnali sono detti segnali di <u>energia</u>

I segnali di potenza >0 sono detti segnali di potenza

Esercizi

Calcolare valor medio, energia e potenza su $\mathbb{R}$ dei segnali

$x_1(t) = \text{rect}(t) \qquad x_2(t) = u(t) \qquad x_3(t) = A\cos(\omega t)$

(1)

$$m[x_1] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_1(t)\,dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \text{rect}(t)\,dt$$

siccome $T \to +\infty$, assumiamo $T > 1/2$. Si ha:

$$m[x_1] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-1/2}^{1/2} dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \cdot 1 = 0$$

$$E[x_1] = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} |x_1|^2\,dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \text{rect}(t)\,dt \quad \text{perché } \text{rect} = |\text{rect}|^2$$

$$= \lim_{T \to +\infty} 1 = 1$$

supponendo $T > 1/2$

$$P[x_1] = \lim_{T \to +\infty} \frac{E_{[-T,T]}(x)}{2T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} = 0$$

(2)

$$m[x_2] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\,dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} dt = \frac{1}{2}$$

$$E[x_2] = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2\,dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{0}^{T} dt = \lim_{T \to +\infty} T = +\infty$$

$$P[x_2] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2\,dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} dt = \frac{1}{2}$$

(3) Il segnale $x_3(t) = A\cos\omega t$ è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, quindi $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Calcoliamone il valor medio su di un intervallo di ampiezza τ, centrato in zero:

$$m_{(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2})}[x_3] = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cos\omega t\, dt = \frac{A}{\tau}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{A}{\tau}\cdot\frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega} = \frac{2A}{\tau\cdot\frac{2\pi}{T}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) = A\frac{\sin\left(\pi\frac{\tau}{T}\right)}{\pi\frac{\tau}{T}} = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Quindi il valor medio è nullo per $\frac{\tau}{T}$ intero, cioè $\tau = kT$ $(k\neq 0)$ cioè su ogni intervallo corrispondente ad un numero intero non nullo di periodi

Inoltre, per $\tau\to+\infty$, il v.m. su $(-\tau,\tau)$ tende a $\emptyset$

quindi $m[x_3] = 0$

Calcoliamo l'energia in $(-\tau/2, \tau/2)$:

$$E_{(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2})}[x_3] = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |A\cos\omega t|^2 dt = A^2\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)dt =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cdot\tau + \frac{A^2}{2}\left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A^2\tau}{2} + \frac{A^2}{2\omega}\sin\omega\tau \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} +\infty$$

La potenza in $(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2})$ è $P_{(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2})} = \frac{E_{(-\tau/2,\tau/2)}}{\tau} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{T/2}\right)$

La potenza in un periodo si ottiene ponendo $\tau = T$:

$P_{(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\mathrm{sinc}(2) = A^2/2$

La potenza su $\mathbb{R}$ si ottiene come lim su $\tau\to+\infty$: $P = A^2/2$

Spazi di segnali

Sia I un intervallo di numeri reali, eventualmente coincidente con $\mathbb{R}$: $I \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce insieme dei segnali ad energia finita su I l'insieme dei segnali definiti su I e con energia finita su I.
Tale insieme è indicato con $\mathcal{L}^2(I)$:

$$\mathcal{L}^2(I) = \left\{ x : I \to \mathbb{C} \ : \ \int_I |x(t)|^2 \, dt < +\infty \right\}$$

Nel caso tempo-discreto si definisce l'insieme ℓ^2 (o $\ell^2(\mathbb{Z})$) come l'insieme dei segnali definiti su $\mathbb{Z}$ e con energia finita:

$$\ell^2 = \left\{ x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

Esempi

1) Tempo continuo:

gradino unitario

$\mathrm{rect}, \Lambda \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ $\qquad u \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Se $x(t) = c$ (costante), $x \in \mathcal{L}^2(a,b)$ $\forall a<b$, ma $x \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

2) Tempo discreto

$u(n) \notin \ell^2$ $\qquad u(n) \cdot \rho^n \in \ell^2 \Leftrightarrow |\rho| < 1$

TEOREMA

$\ell^2(I)$ e ℓ^2 sono spazi vettoriali rispetto alle usuali operazioni di somma tra segnali e prodotto per uno scalare complesso
Il caso $I = \mathbb{R}$ è un caso particolare che ricade nel Teorema

DIMOSTRAZIONE

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di un lemma sulle disuguaglianze tra moduli in $\mathbb{C}$. Tale lemma si basa su altri 2.

Lemma 1 $\quad \forall v, w \in \mathbb{C}, \quad 2|v|\cdot|w| \le |v|^2 + |w|^2$

DIM Lemma 1 $\quad \forall v, w \in \mathbb{C}, \quad 0 \le (|v|-|w|)^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v|\cdot|w| \Rightarrow TH$

Lemma 2 $\quad \forall v, w \in \mathbb{C}, \quad v\bar{w} + \bar{v}w$ è reale e $\le |v|^2 + |w|^2$

DIM. Lemma 2 $\quad v\bar{w} + \bar{v}w = v\bar{w} + \overline{v\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}(v\bar{w})$ quindi è reale

Ma la parte reale di un numero complesso è minore o uguale al suo modulo: $\alpha \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Per cui $\quad v\bar{w} + \bar{v}w \le 2|v\bar{w}| = 2|v|\cdot|w| \le |v|^2 + |w|^2$ per il lemma 1

Lemma 3 $\quad \forall v, w \in \mathbb{C}, \quad |v+w|^2 \le 2|v|^2 + 2|w|^2$

DIM Lemma 3 $\quad |v+w|^2 = (v+w)(\bar{v}+\bar{w}) = |v|^2 + |w|^2 + v\bar{w} + \bar{v}w$

Applicando il lemma 2 si ottiene la Tesi

Per dimostrare che $\mathcal{L}^2(I)$ è uno spazio vettoriale bisogna dimostrare che è chiuso rispetto a somma e prodotto per uno scalare.

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}^2(I), \forall t \in I, \quad |x_1(t) + x_2(t)|^2 \le 2|x_1(t)|^2 + 2|x_2(t)|^2$

per il lemma 3: infatti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ possono essere visti come numeri complessi per t fissato

Ma allora, siccome $\int_I \left(2|x_1(t)|^2 + 2|x_2(t)|^2\right)dt =$

$$= 2\,E_I[x_1] + 2\,E_I[x_2] = K \in \mathbb{R}^+$$

$$E_I[x_1+x_2] = \int_I |x_1(t)+x_2(t)|^2 dx \leq \int_I \left(2|x_1(t)|^2 + 2|x_2(t)|^2\right) dt = K < +\infty$$

Quindi $x_1 + x_2 \in \mathcal{L}^2(I)$

Inoltre, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{L}^2(I)$, $\underset{I}{E}[\alpha x] = \int_I |\alpha x(t)|^2 dt$

$$= |\alpha|^2 \int_I |x(t)|^2 dt = |\alpha|^2 E_I[x] < +\infty,$$

quindi anche $\alpha x \in \mathcal{L}^2(I)$

Questo conclude la dimostrazione per $\mathcal{L}^2(I)$

Nel caso ℓ^2 la dimostrazione è formalmente identica, basta utilizzare l'opportuna definizione di energia

TEOREMA dell'energia mutua come prodotto scalare

1) Se $x_1, x_2 \in \mathcal{L}^2(I)$ o ℓ^2, la loro energia mutua è finita

DIM $\forall t \in I$, $|x_1(t) \cdot \overline{x_2(t)}| = |x_1(t)| \cdot |x_2(t)| \leq \frac{1}{2}|x_1(t)|^2 + \frac{1}{2}|x_2(t)|^2$

Per il lemma 1 sui moduli dei numeri complessi

Ma $\frac{1}{2}|x_1(t)|^2 + \frac{1}{2}|x_2(t)|^2$ è una funzione integrabile su I, perché $x_1, x_2 \in \mathcal{L}^2(I)$. Allora lo è anche $|x_1(t)\overline{x_2(t)}|$

Ma $|E_I(x_1, x_2)| = \left|\int_I x_1(t)\overline{x_2(t)}\,dt\right| \leq \int_I |x_1(t)\overline{x_2(t)}|\,dt < +\infty$ CVD

2) L'energia mutua è un prodotto scalare su $\mathcal{L}^2(I)$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ℓ^2

DIM. Bisogna provare le proprietà del prodotto scalare.

Usando la notazione $\langle x, y \rangle = E_I[x, y]$,

bisogna provare che:

2.1) $\forall\, x, y \in \ell^2(I)$, $\langle x, y \rangle$ esiste finito

2.2) $\forall\, x, y \in \ell^2(I)$, $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

2.3) $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\forall\, y\, x_1, x_2 \in \mathcal{L}^2(I)$, $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$

2.4) $\forall\, x \in \ell^2(I)$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (funz. id. nulla)

2.1) è semplicemente la parte 1 dimostrata a pag 13

Le altre proprietà si dimostrano facilmente a partire dalla definizione usando le proprietà degli integrali

Le dimostrazioni per $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e ℓ^2 sono formalmente identiche, a patto di usare l'opportuna espressione per la mutua energia

Ricordiamo che:

- uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è detto spazio <u>euclideo</u>

- il prodotto scalare induce una <u>norma</u>: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

- uno spazio vettoriale dotato di norma è detto spazio <u>metrico</u>

Quindi $\ell^2(I)$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ℓ^2 sono spazi euclidei e metrici

Ricordiamo le proprietà della norma

La norma associa ad ogni elemento x appartenente allo spazio vettoriale V il valore $\|x\| \in \mathbb{R}$ tale che

1) $\forall x \in V, \quad \|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff x$ è il vettore nullo (funzione id. nulla)

3) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V$

4) $\forall x, y \in V \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "dis. Triangolare"

Distanza tra segnali

La norma permette di definire la distanza tra segnali

$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$

$\forall x, y \, , \quad d(x,y) = \|x - y\|$

Nel caso $\mathcal{L}^2$ (e ℓ^2) la norma di un segnale è la radice quadrata della sua energia

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{E[x]}$$

Allora due segnali di $\mathcal{L}^2$ [ℓ^2] hanno distanza nulla se la loro differenza ha energia nulla

Nello spazio metrico $\mathcal{L}^2$ (e l^2) due segnali sono considerati identici (coincidenti) se la loro distanza è nulla.

Per il caso $\mathcal{L}^2$ ciò equivale a dire che due segnali che differiscono in un insieme discreto di punti hanno distanza nulla, quindi sono coincidenti

Ecco in che senso rect e Rect "sono lo stesso segnale"

Notiamo invece che in l^2 due segnali hanno distanza nulla se e solo se i loro valori coincidono per ogni valore della variabile indipendente n. Infatti

$$d(x,y)_{l^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) - y(n)]^2$$

Tale somma di termini non negativi è nulla se e solo se tutti i termini sono nulli, cioè $\forall n \in \mathbb{Z},\ x(n) = y(n)$

Osserviamo infine che, per i segnali a T.d. definiti su di un insieme finito, esiste già una struttura di spazio euclideo e metrico: è lo spazio euclideo $\mathbb{C}^N$

In conclusione, abbiamo 4 spazi metrici d'interesse

1) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: spazio dei segnali di energia su $\mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

$$\| x \| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt}$$

2) $\mathcal{L}^2(t_1, t_2)$: spazio dei segnali di energia nell'intervallo (t_1, t_2)

$$\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

$$\| x \| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}$$

3) ℓ^2: spazio dei segnali di energia su $\mathbb{Z}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, \overline{y(n)}$$

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2}$$

4) $\mathbb{C}^N$: spazio dei segnali discreti "finiti" (N componenti)

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \overline{y(n)}$$

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2}$$

Per tutti gli spazi metrici vale la

disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|}$$

Per la dimostrazione si rimanda ai corsi di Algebra lineare

Segnali ortogonali

Come per tutti gli spazi euclidei, si definisce l'ortogonalità tra due elementi dello spazio:

Se V è uno spazio euclideo, $x, y \in V$ sono detti ortogonali (e lo si indica con $x \perp y$) se e solo se

$\langle x, y\rangle = 0$

In tal caso, $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = 0$, quindi la relazione di ortogonalità è simmetrica, cioè $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$

Vale il Teorema di Pitagora:

Se V è uno spazio metrico, $x, y \in V$ e $x \perp y$

allora $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

DIM. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \underset{0}{\langle x, y\rangle} + \underset{0}{\langle y, x\rangle} + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2$

Esempi ed esercizi

(1) Siano $x(t) = \cos \pi t$ e $y(t) = \operatorname{sen} \pi t$

1.1. Provare che $x, y \in \mathcal{L}^2(-1,1)$

1.2. Calcolare $\|x\|$, $\|y\|$ e $\langle x, y\rangle$ in tale spazio

1.1 Entrambi i segnali sono limitati: $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ $\forall t \in (-1,1)$

Quindi sono ovviamente a quadrato integrabile in un intervallo finito

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} |\cos \pi t|^2 \, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1+\cos 2\pi t}{2} \, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos 2\pi t \, dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right]_{-1}^{1} = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \|x\| = 1$$

$$\|y\|^2 = \int_{-1}^{1} (\operatorname{sen} \pi t)^2 \, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1-\cos 2\pi t}{2} \, dt = 1 - 0 = 1$$

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} \cos \pi t \cdot \operatorname{sen} \pi t \, dt$$

(essendo segnali reali, il coniugio non ha effetto)

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin 2\pi t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\pi t}{2\pi}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4\pi}(1-1) = 0$$

(2) Siano $x(t) = \operatorname{rect}(t)$ e $y(t) = \operatorname{rect}(t-1)$

Provare che $x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e calcolare $\langle x, y\rangle$

I segnali sono a supporto finito e limitati, quindi hanno energia finita

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t)\cdot rect(t-1)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} rect(t-1)\,dt = 0$$

dove abbiamo usato il trucco della funzione indicatrice e il fatto che $rect(t-1) = 0 \quad \forall t \in (-1/2, 1/2)$

(3) Siano $x, y \in L^2(\mathbb{R})$; sia x pari, cioè $x(t) = x(-t)$ e y dispari, cioè $y(t) = -y(-t)$. Calcolare $\langle x, y\rangle$

Ipotizziamo per semplicità che i segnali siano reali.

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)y(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x(-\tau)y(-\tau)\,d\tau + \int_{0}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} x(\tau)y(\tau)\,d\tau + \int_{0}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt = 0$$

Nota: Siamo sicuri che $\int_0^{+\infty} x\bar{y}$ converge. Infatti $x, y \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow x, y \in L^2(0, +\infty) \Rightarrow$ il prod. scal. in tale spazio è finito. Lo stesso per $\int_{-\infty}^{0} x\bar{y}$

Argomento OPZIONALE

Mappa concettuale strutture algebriche