Continuo esercizio di lunedì

③ $$3x+2 \geq -\frac{2x}{1-x}$$

$$3x+2+\frac{2x}{1-x}\geq 0$$

$$\frac{3x(1-x)+2(1-x)+2x}{1-x}\geq 0$$

$$\frac{3x-3x^2+2\cancel{-2x}\cancel{+2x}}{1-x}\geq 0$$

$$\frac{-3x^2+3x+2}{1-x}\geq 0$$

$$\frac{-(3x^2-3x-2)}{-(-1+x)}\geq 0$$

$$\frac{\cancel{(-1)}(3x^2-3x-2)}{\cancel{(-1)}(-1+x)}\geq 0$$

$$\boxed{\frac{3x^2-3x-2}{-1+x} \geq 0}$$

$$\frac{-3x^2+3x+2}{1-x} > 0$$

$$\frac{\cancel{-}(3x^2-3x-2)}{1-x} \geq 0 \quad \cdot(-1)$$

$$\cancel{(-1)}$$

$$\frac{3x^2-3x-2}{1-x} \leq 0$$

N. $\boxed{3x^2-3x-2 \geq 0}$

Studio il segno

$+ \quad \frac{3-\sqrt{33}}{6} \quad - \quad \frac{3+\sqrt{33}}{6} \quad +$

Trovo radici del polinomio

$$\underset{a}{3}x^2 \underset{b}{-3}x \underset{c}{-2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} = \frac{3\pm\sqrt{9+24}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{33}}{6}$$

$-6 \leq -\sqrt{33} \leq -5$

$\underset{5}{\sqrt{25}} \leq \sqrt{33} \leq \underset{6}{\sqrt{36}}$

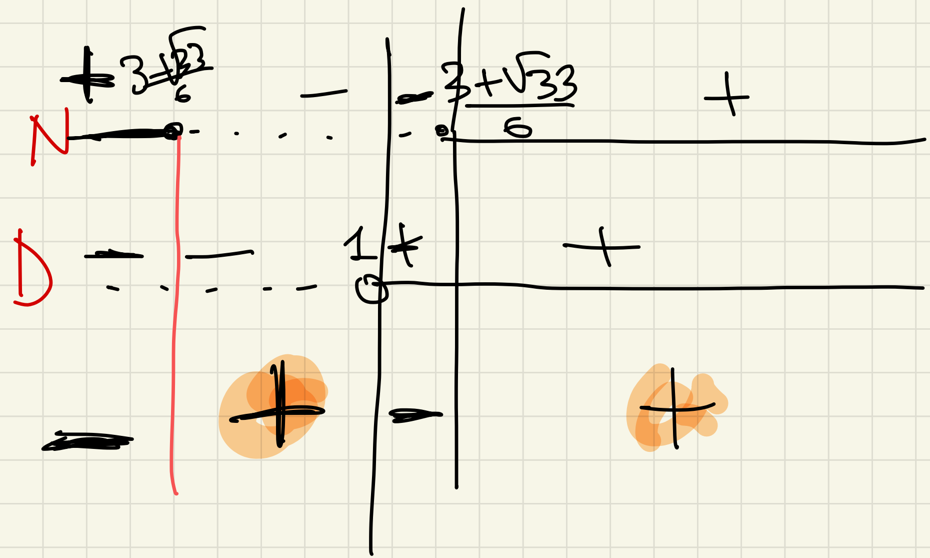
$$\frac{4}{3} = \frac{3+5}{6} \leq x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{6} \leq \frac{3+6}{6} = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{3-6}{6} \leq x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{6} \leq \frac{3-5}{6} = -\frac{1}{3}$$

$D \quad -1+x>0 \Rightarrow x>1$

$- \quad 1 \quad +$

grafico segni



Soluzione della diseq. 3

$$\frac{3-\sqrt{33}}{6} \le x < 1 \qquad x \ge \frac{3+\sqrt{33}}{6}$$

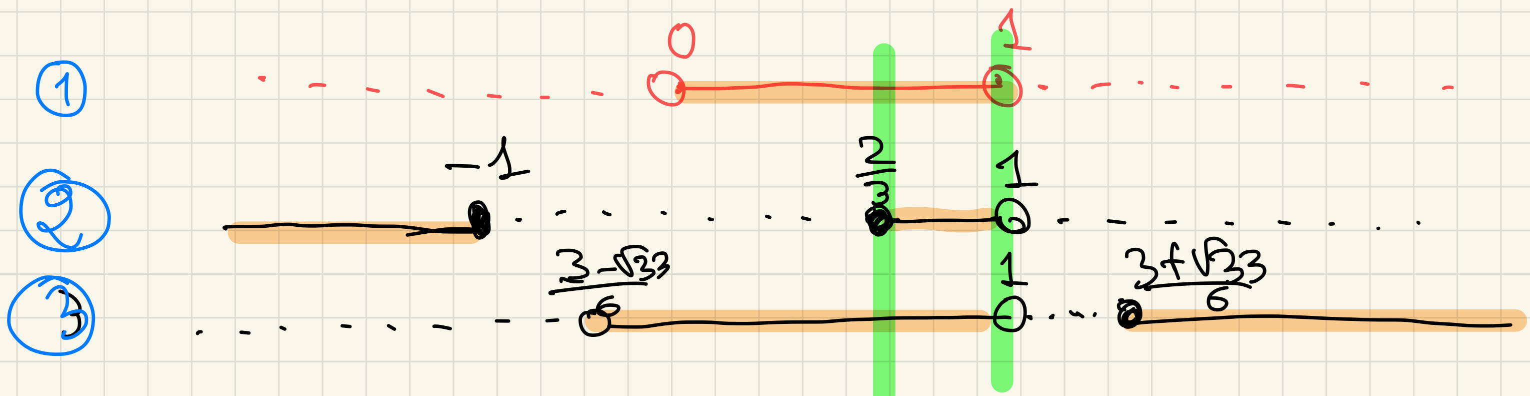
Risolvo sistema

DEVONO ESSERE VERIFICATE CONTEMPORANEAMENTE ①, ②, ③

INTERSEZIONE

$$
\begin{cases}
① \quad 0 < x < 1 \\
② \quad x \leq -1 \qquad \frac{2}{3} \leq x < 1 \\
③ \quad \frac{3-\sqrt{33}}{6} \leq x < 1 \qquad \underbrace{x \geq \frac{3+\sqrt{33}}{6}}
\end{cases}
$$

$$\frac{2}{3} \leq x < 1$$



DISEQUAZ. di 2° grado

es: $3x^2-2x-1$

$x_{1,2} = \frac{2\pm4}{6}$ → $1 = x_1$, $-\frac{1}{3} = x_2$

$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$

$3x^2-3x-1 = 3(x-1)(x+\frac{1}{3})$

$ax^2+bx+c \geq 0$ $<$ $\leq$

$a>0$

trovo le radici $ax^2+bx+c=0$ $x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

① le 2 radici (le 2 soluzioni dell'equazione) sono <u>REALI</u>

$x_1 \neq x_2$

$x_1 < x_2$

$a>0$

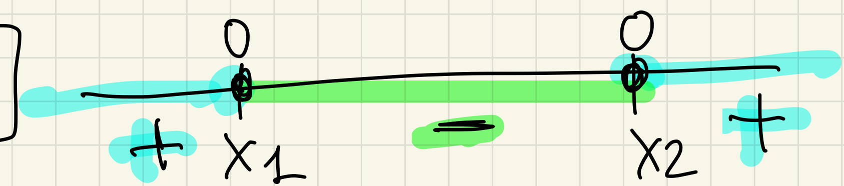
$(b^2-4ac>0)$

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$ax^2+bx+c \geq 0$

$\Updownarrow$

$x \geq x_2$ $x \leq x_1$



② $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$ $\qquad x_1 = x_2$

$b^2 - 4ac = 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{a}\underbrace{(x - x_1)^2}_{\substack{\vee\mid \\ 0}}$$

se $a > 0$

$\boxed{a(x - x_1)^2 \geq 0}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a(x - x_1)^2 > 0$ $\quad x \neq x_1$

$a(x - x_1)^2 \leq 0$ $\quad x = x_1$

$a(x - x_1)^2 < 0$ $\quad \nexists x$ (non esiste soluzione)

3

$\boxed{b^2 - 4ac < 0}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \notin \mathbb{R}$$

$r = \sqrt{b^2-4ac}$ è quel numero r tale

che $r^2 = b^2 - 4ac$

ma $r^2 \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

$ax^2+bx+c=0$ NON HA SOLUZIONI in $\mathbb{R}$.
(ha soluzioni in campo complesso)

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} =$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2-4ac)}{2a} \quad +$$

$b^2-4ac<0$

$-(b^2-4ac)>0$

$+ \quad + \quad +$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2-4ac)}{2a} = ax^2+bx+c > 0$$

$ax^2+bx+c \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

> 0

$ax^2+bx+c \leq 0 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$

< 0

Diseq. con valore assoluto

$$|A| \geq B$$

A, B espressioni numeriche e con la variabile x.

$|A| \geq 0$ sempre

se $B \leq 0$

$$|A| \geq 0 \geq B$$

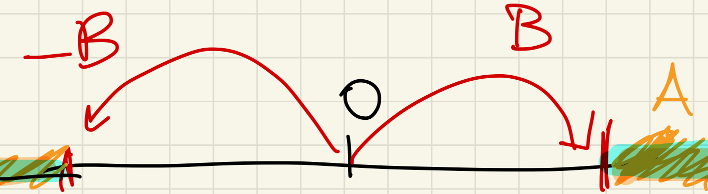
in questo caso la disuguaglianza è sempre vera

(è sempre vero per tutti gli x per cui $B \leq 0$)

es $|3x+2| \geq x-1$ vero $\forall\, x \leq 1$

$x-1 \leq 0 \iff x \leq 1$

se $B>0$ $\quad |A| \geq B$



$|A|$ = distanza tra A e 0 è maggiore di B

$$\Rightarrow \quad A \geq B \quad \text{oppure} \quad A \leq -B$$

$$A \in [B, +\infty) \quad \text{oppure} \quad A \in (-\infty, -B]$$

se $B>0$ comunque

è <u>UNIONE</u> delle soluzioni di $A \geq B$ e $A \leq -B$

es $|3x+2| \geq x-1$

sempre vero per $x \leq 1$

per $x > 1$ devo risolvere

$B > 0$

$A \geq B$

① $3x+2 \geq x-1$

$x > 1$

e

$A \leq -B$

② $3x+2 \leq -(x-1)$

$3x-x \geq -2-1$

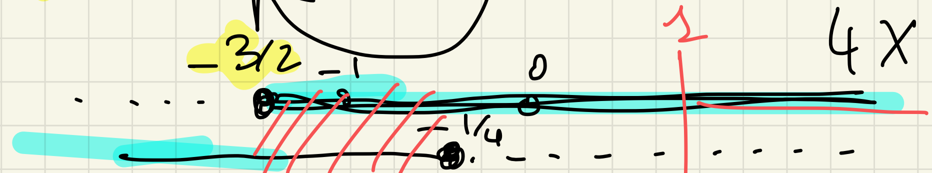
① $3x+2 \geq x-1 \Rightarrow 2x \geq -3$

② $3x+2 \leq -x+1 \Rightarrow 3x+x \leq -2+1$

$4x \leq -1$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \geq -\frac{3}{2} \\ \\ x \leq -\frac{1}{4} \end{array}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$



$|3x+2| \geq x-1$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.

POTENZE

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$$

① $a \geq b > 0 \implies a^n \geq b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② $a \geq 1 > 0 \quad n \geq m \implies \underbrace{a^n \geq a^m}_{} > 0 \qquad 1 = 1$

⊛ $(a^{n-m} \geq 1 \quad n-m \geq 0) \qquad 1^n = 1 \ \forall n$

③ $\underbrace{0 < a < 1}_{} \quad n \geq m \implies 0 \leq a^n \leq a^m$

Teorema (conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$).

Osservazione $r \in \mathbb{R}$ $r \cdot r = r^2 \geq 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$

ⓐ $r^n \geq 0$ $\forall n$ pari $\forall r \in \mathbb{R}$

$r^6, r^8, r^{212} \geq 0 \ . \ \forall r$

ⓑ se n è dispari

$r^n \geq 0$ se $r \geq 0$

$r^n \leq 0$ se $r \leq 0$

PER OGNI

$\forall x \in \mathbb{R}$ $x \geq 0$ $\underbrace{\exists!}_{\text{ESISTE UNICO}}$ $y \in \mathbb{R}$ $y \geq 0$ tale che $y^n = x$

$\forall n \in \mathbb{N}$

y = RADICE n-esima di $x = x^{1/n}$

$= \sqrt[n]{x}$

$y = x^{\frac{1}{n}}$

prop. potenze

$$x = y^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \stackrel{\downarrow}{=} x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x^1$$

RADICE È SEMPRE POSITIVA

$$\sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq 0 \quad \exists y = x^{\frac{1}{n}} \quad (y^n = x)$

$y \geq 0$!

se $\overset{?}{x < 0}$ e n è PARI NON ESISTE nessun numero $y \in \mathbb{R}$ tale che $\underbrace{y^n}_{\geq 0} = \underbrace{x}_{<0}$

UN NUMERO POSITIVO NON PUÒ essere uguale a numero negativo!

se n è pari $y^n \geq 0$

$\sqrt[4]{-3}$ NON ESISTE $\quad (-3)^{1/4}$ NON ESISTE se $x<0$ e n è DISPARI

allora ESISTE UNICO $y<0$

tale che $y^n = x$ $\left(y = x^{\frac{1}{n}}\right)$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

DISEQUAZIONI con le radici (irrazionali)

④ $\left(\sqrt[3]{3x^2-2x}\right)^3 \geq (1)^3 > 0$

$a \geq b$

$\Downarrow$

$a^3 \geq b^3$

$3x^2-2x$ può essere positivo, negativo o nullo (e la radice è SEMPRE BEN DEFINITA).

$3x^2-2x \geq 1$

$\boxed{3x^2-2x-1 \geq 0}$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$x \geq 1$ UNIONE $x \leq -\frac{1}{3}$

② $\sqrt[2]{3x^2-2x} \geq 3x-1$

QUESTA DISEQ NON HA SENSO per $0 < x < \frac{2}{3}$

dato che indice radice è pari (2), so che la radice è ben definita solo se

$\boxed{3x^2-2x \geq 0}$

CONDIZIONE DI ~~ES~~ BUONA POSIZIONE (ESISTENZA) per la disequazione

$x(3x-2) \geq 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{2}{3}$

$x \leq 0 \quad x \geq \frac{2}{3}$