Introduco un concetto di DISTANZA tra numeri reali

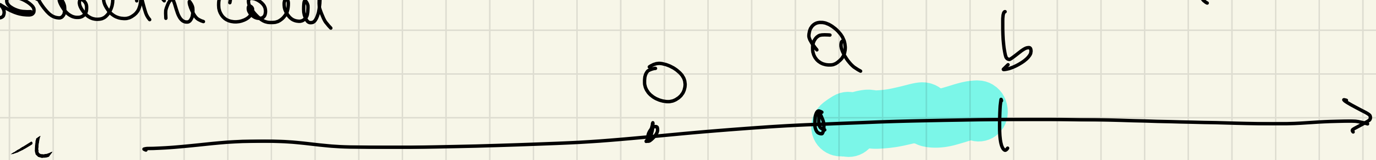
$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad d(a,b) =$ distanza tra a e b

$$= |b-a| = |a-b|$$

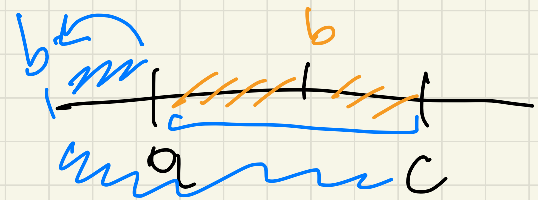
$$b-a = -(-b+a) = -(a-b)$$

$$|x| = |-x| \qquad |b-a| = |-(a-b)| = |a-b|$$

geometricamente



La distanza tra i numeri reali a e b è la lunghezza del segmento sulla retta reale che ha come estremi il punto a e il punto b.



$$d(a,b) \geq 0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$d(a,b) = 0 \iff |a-b| = 0 \iff a-b=0$$

$$\iff a=b$$

$$d(a,b) = d(b,a)$$

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$$

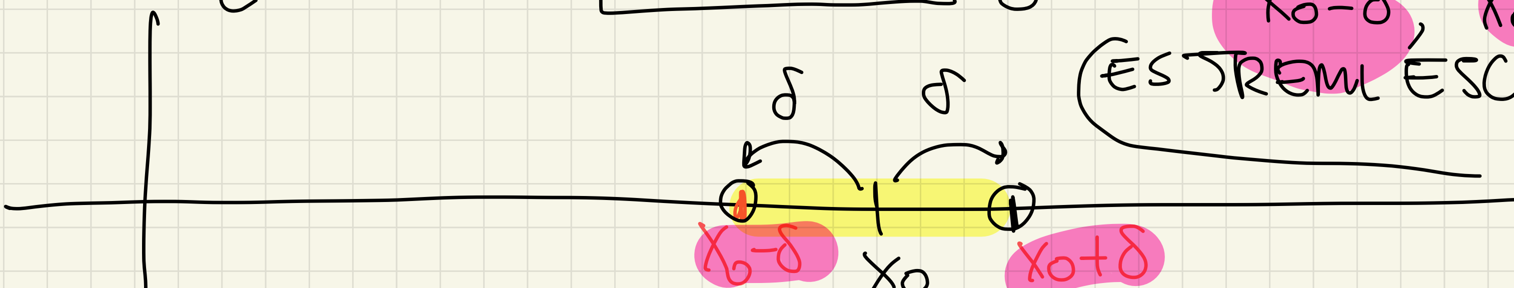
Def Fisso $\delta > 0$ (numero positivo)

fisso $x_0 \in \mathbb{R}$

l'intervallo aperto di centro x_0 e raggio $\delta > 0$ è l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R},\ \underbrace{d(x, x_0) < \delta}\} =$$

tutti i pti che stanno nell'intervallo di estremi $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ (ESTREMI ESCLUSI)



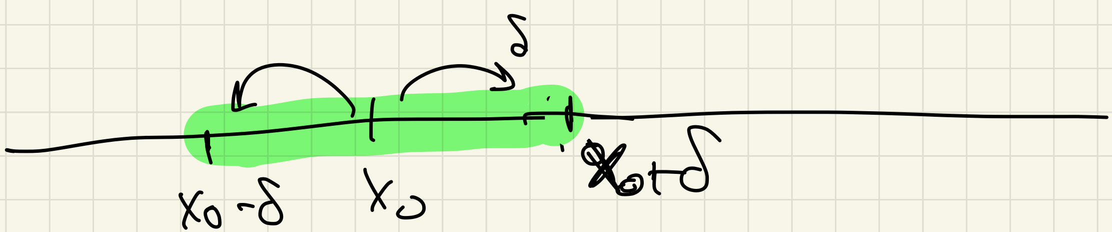
$$= (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) = \,]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$$

l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \quad d(x,x_0) \le \delta\} =$

intervallo CHIUSO di centro x_0 e raggio δ = tutti i pti nell'intervallo di estremi $x_0-\delta$, $x_0+\delta$ ESTREMI INCLUSI

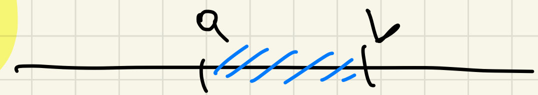
$$[x_0-\delta, x_0+\delta]$$

(PARENTESI QUADRATE: ESTREMI INCLUSI)



INTERVALLI

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a < b$



APERTO $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \quad a < x < b\}$ Estremi esclusi

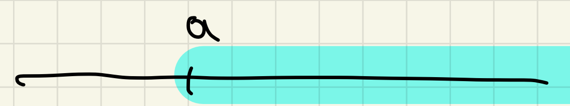
CHIUSO $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \quad a \le x \le b\}$ estremi inclusi

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \quad a \le x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \quad a < x \le b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \quad x > a\}$

APERTO

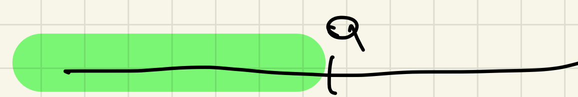


$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \quad x \ge a\}$

CHIUSO

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \quad x < a\}$

APERTO



$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \quad x \le a\}$

DISEQUAZIONI con VALORI ASSOLUTI

A, B "espressioni con le x e con numeri reali" (possono essere numeri o polinomi o fratt. nella variabile x, con coefficienti reali)

$$|A| \leq B$$

es: $|3x+2| \leq \frac{2x}{1-x}$

1) se $B < 0$ — $|A| < 0$ MAI VERO — LA DISEQUAZIONE NON È VERIFICATA

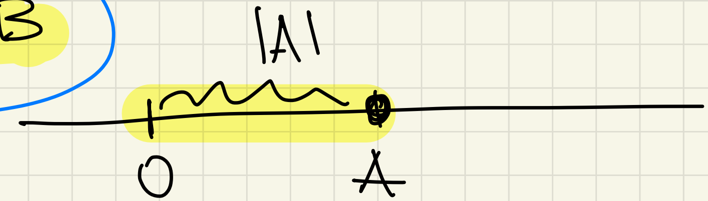
2) se $B = 0$ — $|A| \leq 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A = 0$

3) se $B > 0$

se $|A| < B \Rightarrow B \leq 0$ LA DIS. NON È MAI VERIFICATA

2) Se $B \geq 0$

$|A| \leq B$



$|A| =$ distanza tra A e 0

le A che risolvono la disequazione sono tutti e soli i numeri reali che stanno a distanza minore o uguale di B da 0.

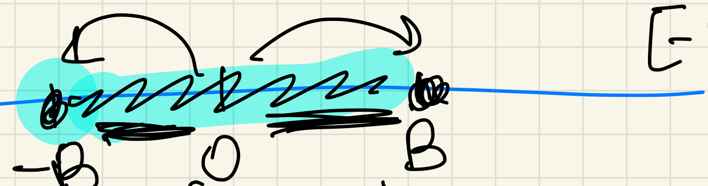
$$|A| \leq B$$

$$\Updownarrow$$

$$A \in [-B, B]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} A \leq B \\ A \geq -B \end{cases}$$



$[-B, B]$

DEVO FARE INTERSEZIONE TRA LE SOLUZ DELLA PRIMA e della SEC.

DEVONO ESSERE CONTEMP. SODDISFATTE LE 2 DISEQUAZIONI

$|A| < B \iff A \in (-B, B)$

(distanza tra A e O è minore di B

cioè A sta nell'intervallo aperto di centro O e raggio B

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases}$$

<u>SISTEMA</u>

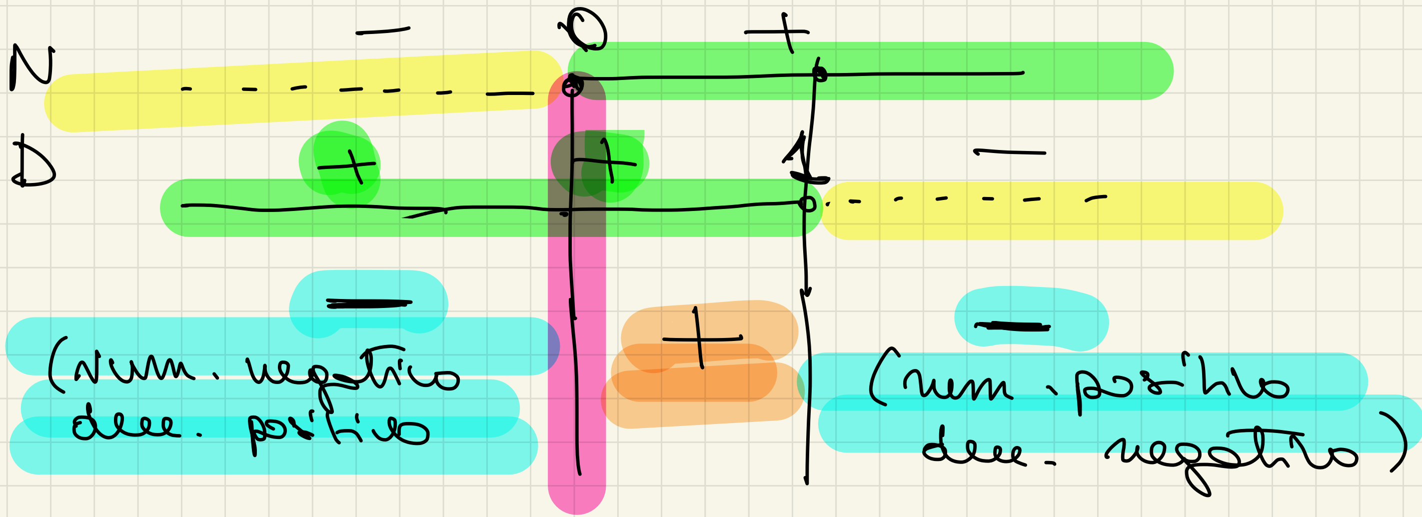
Es $\left|3x+2\right| \le \frac{2x}{1-x}$.

$B = \frac{2x}{1-x}$ per quali x $B<0$?

$\frac{2x}{1-x} < 0$ → diseq. fratta
studio il segno del numeratore
, il segno del denominatore
e poi faccio il prodotto dei segni

N. $2x > 0 \Rightarrow x > 0$ NUMERATORE E' POSITIVO per $x>0$, ZERO se $x=0$, NEGATIVO se $x<0$.

D. $1-x > 0 \Rightarrow 1 > x \Rightarrow x < 1$
DENOM. E' POSITIVO se $x<1$
NULLO se $x=1$, NEGATIVO se $x>1$



$$\frac{2x}{1-x} < 0 \iff x < 0 \quad \text{oppure} \quad x > 1$$

$$\frac{2x}{1-x} = 0 \iff x = 0$$

$$\frac{2x}{1-x} > 0 \iff 0 < x < 1$$

$x \neq 1$

$$|3x+2| \leq \frac{2x}{1-x}$$

- se $\underline{x<0}$ oppure $x>1$ NON HO SOLUZIONI

($|3x+2|<0$ NON HA SOLUZIONI)

se $\underline{x=0} \Rightarrow \boxed{|3x+2| = 0}$

$|0^2+3\cdot 0+2| = 0$ FALSA

$|2| = 2 \neq 0$

$x=1$ LO ELIMINO perché la frazione non è BEN DEFINITA per $x=1$

$x \leq 0$ e $x \geq 1$ NON SONO SOLUZIONI

Mi riduco a considerare $0 < x < 1$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ ② \quad \underbrace{3x+2}_{} \le \dfrac{2x}{1-x} \\ ③ \quad \underbrace{3x+2}_{} \ge -\dfrac{2x}{1-x} \end{cases}$$

$A \le B$

$A \ge -B$

② $3x+2 \le \dfrac{2x}{1-x}$

$$3x+2 - \frac{2x}{1-x} \le 0 \qquad \frac{3x \cdot (1-x) + 2(1-x) - 2x}{1-x} \le 0$$

$$\boxed{\frac{3x - 3x^2 + 2 - 2x - 2x}{1-x} \le 0}$$

$$\frac{-3x^2-x+2}{1-x} \leq 0$$

segno denominatore $\quad 1-x>0 \Rightarrow$ per $x<1$ DENOMIN è POSITIVO

per $x>1$ è NEGATIVO

$x=1$ NON è POSSIBILE

segno NUMERATORE

$$-3x^2-x+2 \geq 0$$

cambio segno a tutto e inverto DISEQUAZ.

$$\boxed{3x^2+x-2 \leq 0}$$

Diseq. di 2° grado $3x^2+x-2 \leq 0$

TROVO le radici del POLINOMIO

cioè le soluzioni di

$$3x^2+x-2=0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

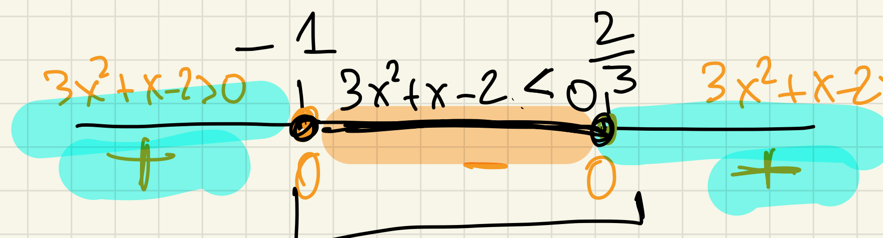
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{-1\pm 5}{6}=\begin{cases}\frac{4}{6}\\ \frac{-6}{6}=-1\end{cases}$$

le 2 radici sono

-1 e $\frac{2}{3}$



$$\underbrace{3x^2+x-2 \le 0}_{\text{NUM. E' POSITIVO}} \iff -1 \le x \le \frac{2}{3}$$

$$\frac{-3x^2-x+2}{1-x} \le 0 \iff \boxed{\begin{matrix} x \le -1 \\ \frac{2}{3} \le x < 1 \end{matrix}}$$